



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA POSIBLE DESCRIPCIÓN RELATIVISTA PARA
DINÁMICAS
MODIFICADAS APLICADO EN ASTROFÍSICA
GRAVITACIONAL

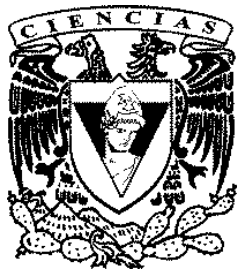
T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

FÍSICO

P R E S E N T A :

YETLI MARIANA ROSAS GUEVARA

TUTOR DE TESIS: DR. SERGIO MENDOZA RAMOS



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2006

Agradecimientos

Quiero agradecer a una persona que se ha dedicado la mayor parte de su vida a cambiar la educación de la física y que por lo menos en mí influyó enormemente, mi padre Jorge Rosas. Agradezco también a mi madre Guadalupe Guevara por apoyarme en cada momento. A mis hermanas Georgina, Copelia y Dulcinea Rosas por haberme motivado, soportado y apoyado.

Durante mi educación elemental, tuve un profesor de física excelente Fis. Miguel Sanchez quien me motivó a continuar por este camino, debido a todas las visitas que organizó a los institutos de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y que además se volvió un amigo. Durante la carrera de física tuve profesores excelentes que también fueron una gran fuente de enseñanza, al Dr. Darío Moreno, Miguel Alcubierre, Octavio Castaños y Ramón Lopez. Agradezco también al Fis. Rene Ortega y Dr. José Luis Boldú que me enseñaron que la experimentación es un parte importante de la física y además necesaria.

Agradezco a Dr. Sergio Mendoza no sólo por ser mi director de tesis, sino también por mostrarme la verdadera investigación y darme las herramientas básicas para trabajar en ella. Muchas veces, su gran efusividad al hablar de astrofísica me motivó en conocer más a fondo esta rama. Gracias a esto, encontré un gusto desconocido en mi persona, sobre la astrofísica.

Quiero darles las gracias a la Dra. Ma. De los Angeles Ortiz y al Dr. Eugenio Ley Koo por ser mis sinodales y por sus óptimos comentarios sobre este trabajo y por ser una parte de mi formación en la Facultad de Ciencias.

También agradezco a Dr. Octavio Valenzuela y Dr. Javier Hernandez por ser mis sinodales y por sus observaciones de mi trabajo.

Una parte importante en mi formación en la facultad de Ciencias fueron los amigos que formé y han sido de gran apoyo:

Selene Cruz por ser una amiga sincera y una persona que sabe escuchar. Cristina Romero y Citlali Perez por su gran amistad, compañerismo y apoyo. Edgar y Julio por su compañía y preocupación en mi persona. Maruzia por los múltiples favores que me hizo como compañera de cubículo. Orlando Arango por ser un gran amigo y hacerme sonreír siempre.

Quiero expresar un agradecimiento profundo a la UNAM por haberme formado de manera académica que comienza desde Iniciación Universitaria que fue de gran impacto de lo que soy ahora y espero ser de ejemplo para mostrar que este sistema escolar funciona. Y que ahora termina en la Facultad de Ciencias.

Por último, agradezco al Instituto de Astronomía por apoyarme en la realización de mi tesis y a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) por su apoyo financiero a través del proyecto DGAPA-UNAM (IN119023).

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	1
Notación	3
1. Ecuaciones de Einstein y modificaciones	5
§1.1. Deducción de las ecuaciones de Einstein	6
§1.2. La acción de Einstein-Hilbert	8
§1.3. Constante cosmológica e inflación	12
§1.4. Modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert	14
2. Materia oscura y teorías modificadas	17
§2.1. Materia oscura	18
§2.2. MOND (Dinámica Newtoniana Modificada)	21
§2.3. AQUAL (Aquadratic Lagragian Theory)	24
§2.4. RAQUAL (versión relativista de AQUAL)	25
§2.5. TeVeS	26
3. Teorías métricas $f(R)$ de gravitación	29
§3.1. Principios	30
§3.2. Propiedades generales de las teorías $f(R)$	31
§3.3. Ondas gravitacionales	33
§3.4. Posible problema genérico para teorías métricas	39
§3.5. Teoría $R^{3/2}$	41
4. Gravitación $f(R)$	45
§4.1. Solución de las ecuaciones de campo $f(R)$	45

§4.2. Movimiento en un campo central	48
§4.3. Límite MONDiano	49
§4.4. Deflexión de la luz para un sistema con simetría esférica	50
§4.5. Teoría de lentes gravitacionales	53
§4.5.1. Ecuación de la lente	53
§4.5.2. Amplificación de Imágenes	56
§4.5.3. Dilación del tiempo de llegada	57
§4.6. Análisis del problema genérico	59
Conclusiones	61
A. Ecuación geodésica	63
B. Aproximación eikonal	65
C. Deflexión de la luz en relatividad general	67

Índice de figuras

2.1. Curva típica de rotación de una galaxia espiral	19
4.1. Deflexión de la luz pasando cerca de una masa M	50
4.2. Fluctuación del ángulo de deflexión	53
4.3. Diagrama de la geometría de un lente gravitacional puntual	54

Resumen

En el presente trabajo se reproducen las ecuaciones de campo de Einstein por dos caminos. Una es de manera intuitiva a partir de la ecuación de Poisson. La otra es a partir de la acción de Einstein-Hilbert mediante el principio de mínima acción. En esta misma línea, analizamos algunas modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert para explicar ciertas anomalías observacionales a nivel cosmológico. También se hace una breve introducción del paradigma de materia oscura y se hace referencia a varias propuestas alternativas a éste. Entre ellas está MOND (Modified Newtonian Dynamics), AQUAL (Aquadratic Lagrangian) y TeVeS.

Motivados por estas propuestas alternativas, se reproduce el desarrollo de las teorías métricas de gravitación $f(R)$ que consisten en modificar la acción del campo gravitacional por una función f cuyo argumento es el escalar de Ricci R . Se discute el hecho de que una teoría métrica $f(R) = R^n$ predice la existencia de ondas gravitacionales que viajan a la velocidad de la luz en el vacío.

Con el propósito de explicar las curvas de rotación de las galaxias espirales, se resolvió las ecuaciones de campo $R^{3/2}$ para una métrica tipo Schwarzschild. Sin embargo, la solución no resuelve el problema de las curvas de rotación.

El trabajo también reproduce la teoría métrica de gravitación propuesta por Sobouti (2006). Esta es una teoría métrica de gravitación $f(R)$ que explica las curvas de rotación planas de las galaxias espirales. Se muestra también que existe una modificación considerable en la deflexión de la luz comparada con la obtenida por la relatividad general. Estos resultados son cruciales en el desarrollo de una teoría modificada de la gravitación que de una descripción alternativa al paradigma de materia oscura. Por último, se presentan algunos resultados inmediatos para una lente puntual como son la ecuación de la lente, la posición de las imágenes así como la amplificación de las mismas y la dilación del tiempo de llegada.

Notación

En relatividad general hay diferentes convenciones respecto a la signatura de la métrica y las literales de los índices de un objeto que vive en un espacio de tres dimensiones y de uno que vive en cuatro dimensiones. Por lo tanto, se incluye esta sección para uniformizar notación.

Se denotará a la 4-métrica del espacio tiempo como $g_{\mu\nu}$ con signatura $(+, -, -, -)$ y la métrica del espacio-tiempo plano se denotará como $\eta_{\mu\nu}$.

Se define el tensor de Riemann como:

$$R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} := \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma}. \quad (1)$$

El tensor de Ricci se define como,

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma}, \quad (2)$$

y el tensor de Einstein como,

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (3)$$

Índices que van de 0 a 3 se denotan con letras griegas $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$ mientras que índices que van de 1 a 3 se denotan con letras latinas $a, b, c, \dots, i, j, k, \dots$

Para evitar confusión las componentes de la derivada covariante se denotarán de las siguientes maneras ∇_{α} ó $[\]_{;\alpha}$ y la derivada parcial se denotará como ∂_{α} ó $[\]_{,\alpha}$.

A la divergencia en el espacio de tres dimensiones solo se le denotará como $\nabla \cdot$ y el gradiente en el espacio de tres dimensiones como ∇ .

Capítulo 1

Ecuaciones de Einstein y modificaciones

Uno de los principales paradigmas en la astrofísica actual, es la existencia de materia oscura para explicar las anomalías encontradas en las observaciones astronómicas, tal como es el problema presentado en las curvas de rotación de galaxias espirales donde básicamente consiste en una discrepancia entre las velocidades de rotación de la materia del disco de las galaxias espirales y las velocidades esperadas en la dinámica newtoniana considerando la masa visible. Otro problema son las inconsistencias en la teoría del Big Bang, por y la Formación de estructura. Sin embargo, después de 30 años de postular su existencia recientemente se han presentado alternativas que modifican a la teoría de la relatividad general.

El punto fundamental de la teoría de Gravitación de Einstein son las ecuaciones de campo, que nos dice como interacciona el espacio-tiempo con la distribución de materia y energía. Un camino alternativo para modificar la gravitación sería cambiar ésta interacción entre espaciotiempo y la distribución de materia y energía. Tomando en cuenta esto, en este capítulo se deducen las ecuaciones de Einstein así como algunas modificaciones que se han realizado y que resultan útiles para la astrofísica.

En la primera sección se deducen las ecuaciones de Einstein con argumentos poco formales pero intuitivos. En la segunda sección deducimos las ecuaciones de manera más formal proponiendo una acción del campo gravitacional y derivando las ecuaciones de movimiento. En la tercera sección modificamos las ecuaciones de Einstein adicionando una constante llamada cosmológica y como consecuencia obtendremos la inflación. Por último, en la cuarta sección obtenemos la inflación con una modificación a la acción de Hilbert-Einstein.

§1.1. Deducción de las ecuaciones de Einstein a partir de la ecuación de Poisson

En principio, tenemos que encontrar una ecuación que generalice relativísticamente la ecuación de Poisson para el potencial newtoniano ϕ , dado por (Landau & Lifshitz, 1975)

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.1)$$

donde $\nabla^2 = \delta^{kj}\partial_k\partial_j$ es el laplaciano espacial y ρ es la densidad de masa. El lado izquierdo de (1.1) es un operador diferencial de segundo orden actuando sobre el campo gravitacional y el lado derecho es una distribución de masa. Una posible generalización de la ecuación (1.1) debe tomar la forma de una ecuación entre dos tensores. En este caso, una generalización de la masa sería el tensor $T_{\mu\nu}$ llamado tensor de energía-momento que satisface la condición de que la divergencia de este tensor es nula, es decir (Landau & Lifshitz, 1975),

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.2)$$

De esta manera se generaliza la conservación de masa, energía y momento, siendo $T_{\mu\nu}$ simétrico. Por otra parte, el potencial puede ser reemplazado por el tensor métrico del espacio-tiempo, siendo también simétrico. Por lo tanto, la nueva ecuación tendría a $T_{\mu\nu}$ proporcional a algún tensor simétrico donde intervengan derivadas de segundo orden de la métrica. De hecho, usando la primera corrección al espacio de Minkowski en la presencia de un campo gravitacional débil es en la componente temporal de la métrica que está dada por

$$g_{00} \approx 1 + 2\phi/c^2, \quad (1.3)$$

¹ y la componente temporal del tensor de energía-momento es $T_{00} \approx \rho$ en el límite newtoniano. De aquí que la ecuación (1.1) está dado por

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \quad (1.4)$$

Sin embargo, esta ecuación no es una generalización tensorial.

La elección más natural de un tensor que contenga segundas derivadas de la métrica, sería el que se obtiene al aplicar el D'Alembertiano $\nabla^\mu\nabla_\mu$ sobre la métrica, pero esta operación es automáticamente cero, puesto que la derivada covariante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es cero.

¹Es fácil encontrar este resultado considerando el movimiento de una partícula en un campo gravitacional (Landau & Lifshitz, 1975)

Existe otro tensor contruido por las segundas derivadas de la métrica (aunque también contiene primeras derivadas) que además es construido de manera natural al generalizar el operador de derivada covariante por lo que tiene información de la curvatura del espacio-tiempo: El tensor de Riemann $R_{\mu\rho\nu}^{\sigma}$, el problema es que este tensor no puede estar en la ecuación ya que es un tensor de mayor rango que el tensor de energía momento. Sin embargo, la ecuación (1.4) sugiere que los tensores son de segundo rango.

A pesar de este hecho, se puede construir un tensor de rango 2. Contrayendo $R_{\mu\rho\nu}^{\sigma}$ se obtiene el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. La manera obvia sería proponer a $R_{\mu\nu}$ proporcional a $T_{\mu\nu}$. De hecho Einstein sugirió esta idea en algún momento. Sin embargo existe un problema con la conservación de la energía puesto que $T_{\mu\nu}$ cumple la ecuación (1.2), implicando que

$$\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.5)$$

Ésto no es válido para una geometría arbitraria. Por otra parte utilizando las identidades de Bianchi es posible mostrar que (Carroll, Sean M., 1997)

$$\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_{\nu}R, \quad (1.6)$$

en donde R es el escalar de Ricci o de curvatura. Así pues, implicaría entonces, que $R = kg^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = kT$ donde k es una constante. De esta manera, se obtiene naturalmente que

$$\nabla^{\mu}T = 0. \quad (1.7)$$

La derivada covariante de un escalar es únicamente su derivada parcial, por lo tanto la ec. (1.7) nos dice que T es una constante en todo el espacio-tiempo, lo que es poco creíble debido a que $T = 0$ en el vacío mientras que $T \neq 0$ en la materia.

Es posible construir un tensor simétrico de rango 2, a partir del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. A este tensor se le denomina el tensor de Einstein y está definido por

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.8)$$

Con la ayuda de las identidades de Bianchi se puede mostrar que

$$\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.9)$$

De esta manera resulta natural proponer las siguientes ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Para mostrar que la ecuación (1.10) tiene sentido, procedamos como sigue, contraigamosla consigo misma para obtener

$$R = -kT. \quad (1.11)$$

Sustituyendo la ecuación (1.11) en la ecuación (1.10) se obtiene una forma alternativa a la ecuación de campo (1.10) dada por

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right). \quad (1.12)$$

Con ayuda de la ecuación (1.3) se sigue que la traza T del tensor de energía momento a primer orden, está dada por

$$T = g^{00}T_{00} = T_{00}. \quad (1.13)$$

Utilizando ésto en la ecuación (1.12), obtenemos

$$R_{00} = \frac{1}{2}kT_{00}. \quad (1.14)$$

Por otra parte la componente R_{00} a primer orden de la aproximación está dada por (Landau & Lifshitz, 1975)

$$R_{00} = -1/2\nabla^2 h_{00}. \quad (1.15)$$

De esta manera, la componente temporal de las ecuaciones (1.12) es

$$\nabla^2 h_{00} = -kT_{00} \quad (1.16)$$

que es exactamente (1.4) si $k = 8\pi G/c^4$. Por lo tanto, las ecuaciones de campo (1.10) son una propuesta coherente a las ecuaciones de campo gravitacional. De esta manera fueron propuestas por Einstein en 1916.

§1.2. La acción de Einstein-Hilbert

Las ecuaciones de Einstein pueden ser derivadas por un argumento más formal que el mostrado en la sección anterior utilizando el principio de mínima acción.

Para hallar las ecuaciones de campo es necesario determinar S_m y S_g , que son la acción del campo gravitacional y de la materia respectivamente. En principio, no existe un camino a priori para determinar S_g . Sin embargo, por medio de argumentos físicos coherentes podemos hacerlo (Landau & Lifshitz, 1975).

La acción S_g debe expresarse en forma de una integral de un escalar $\int G\sqrt{-g}d\Omega$, extendida sobre todo el espacio y todos los valores de la coordenada temporal entre dos puntos dados. Para determinar este escalar, partiremos del hecho que las ecuaciones del campo gravitacional debe contener derivadas de segundo orden de la métrica puesto que en el límite cuando la velocidad de la luz $c \rightarrow \infty$ entonces llegamos a la ecuación de Poisson (1.1). Dado que las ecuaciones del campo se obtienen variando la acción, es necesario que el integrando G contenga derivadas de la métrica de orden no superior al primero. Por consiguiente debe de contener al tensor métrico y a la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$. Sin embargo, es imposible construir un escalar adecuado a partir de $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ únicamente. Esto se ve mediante una elección adecuada de coordenadas. En efecto, debido a que en el sistema de referencia galileano, i.e. plano, la conexión tiene un valor nulo, entonces la acción en ese punto no dependerá de las primeras derivadas de la métrica. Como esto puede hacerse para cada punto en el espacio y debido al caracter escalar de la acción, entonces la acción no depende de las primeras derivadas de la métrica. Sin embargo, existe el escalar de Ricci R que contiene $g_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas, así como las segundas derivadas de manera lineal respecto a éstas.

Existen otros escalares relativistas a considerar para la acción gravitacional como es la contracción del tensor de Ricci consigo mismo $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ y la contracción del tensor de Riemann consigo mismo $R_{\mu\alpha\beta\nu}R^{\mu\alpha\beta\nu}$, puesto que no existe una razón fundamental para no descartarla. Sin embargo, estos términos son despreciados por el simple hecho que complican una teoría que en sí es elegante y parcialmente exitosa, por lo menos en el sistema solar.

Considerando solamente al escalar de Ricci en la acción, la integral invariante $\int R\sqrt{-g}d\Omega$, se puede transformar, mediante el teorema de Gauss, en la integral de una expresión que no contiene segundas derivadas². Por lo tanto, podemos escribir entonces que

$$\delta S_g = \int -\frac{1}{k}\delta[R\sqrt{-g}]d\Omega, \quad (1.17)$$

donde la constante k es obtenida en el límite newtoniano al comparar con la acción del

²La expresión $\int R\sqrt{-g}d\Omega$ puede ser presentada de la siguiente forma

$$\int R\sqrt{-g}d\Omega = \int G\sqrt{-g}d\Omega + \int \partial_\mu(\sqrt{-g}w^\mu)d\Omega$$

donde G contiene sólo el tensor $g_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas y el integrando de la segunda integral, tiene forma de una divergencia de una cierta cantidad w^μ . Usando el teorema de Gauss, esta integral es transformada en una integral de superficie, cuya limites de integración es la superficie que rodea al volumen de la región de integración de las otras integrales. Cuando se varía la acción, éste término desaparece, puesto que la variación del campo en los límites de la región de integración es cero.

campo gravitacional y está dada por $k = 16\pi G/c^3$. Esta forma fue propuesta por primera vez por Hilbert inspiradas en los artículos de Einstein, quien también derivó las ecuaciones de campo de manera independiente pero con argumentos geométricos (Hilbert, 1915; Einstein, 1915).

Considerando la variación respecto a la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ y usando el hecho que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, entonces

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d\Omega [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta(\sqrt{-g})]. \quad (1.18)$$

Para obtener la variación del primer término de (1.18), recordemos que el tensor de Ricci es la contracción del tensor Riemann, el cual está dado por

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} := \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}. \quad (1.19)$$

La variación de éste respecto a la métrica puede ser encontrada primero variando la conexión respecto a la métrica. Sin embargo, podemos considerar variaciones arbitrarias de la conexión, remplazando

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

La variación $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ es la diferencia de dos conexiones y en sí mismo es un tensor. Por consiguiente, la derivada covariante de $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, es

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) = \partial_\lambda(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) + \Gamma^\alpha_{\sigma\lambda} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \delta\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \delta\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}. \quad (1.21)$$

De aquí y usando las ecuaciones (1.19),

$$\delta R^\alpha_{\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}). \quad (1.22)$$

Por lo tanto, la contribución del primer término en (1.18) puede ser escrita como

$$\int d\Omega \sqrt{-g} \nabla_\alpha [g^{\mu\alpha} (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) - g^{\mu\nu} (\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu})], \quad (1.23)$$

Ahora bien, por el teorema de Gauss, ésta integral es igual a la contribución de la frontera de todo el espacio. Este término no contribuye a la variación. Para calcular la variación del tercer término de (1.18), se utiliza el hecho de que cualquier matriz M cumple que $\text{Tr}(\ln M) = \ln(\det M)$ (Carroll, Sean M., 1997). Aplicando esta propiedad al tensor $g^{\mu\nu}$,

obtenemos que

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

Usando éste resultado en la expresión (1.18), y recordando el hecho de que el primer término no contribuye a la variación, entonces

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d\Omega \sqrt{-g} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.25)$$

Por otra parte, la acción de la materia puede escribirse de la siguiente forma

$$S_m = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \Lambda d\Omega, \quad (1.26)$$

donde Λ es una función de las cantidades q que describen el estado del sistema y sus respectivas derivadas \dot{q} . Al calcular la variación δS_m , los términos relevantes son los términos asociados a cambios en $g_{\mu\nu}$ para obtener las ecuaciones de campo.

Usando el teorema de Gauss y el hecho de que $\delta g^{\mu\nu} = 0$ en los límites de integración, la variación de la acción es

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int d\Omega \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

Definimos ahora el tensor de Momento-Energía $T_{\mu\nu}$ mediante la siguiente relación:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} := \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}, \quad (1.28)$$

entonces la variación de S_m queda de la siguiente forma,

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\Omega. \quad (1.29)$$

Utilizando la ecuación (1.25), junto con ésto y extremizando la variación, obtenemos que

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d\Omega \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right] = 0, \quad (1.30)$$

siendo arbitraria la variación de la métrica $g_{\mu\nu}$ entonces el término entre paréntesis es cero en la ecuación (1.30), obteniendo las ecuaciones de campo esperadas.

§1.3. Constante cosmológica e inflación

Una de las primeras modificaciones³ y la más simple a las ecuaciones de Einstein se obtiene al introducir la denominada constante cosmológica Λ . Proponemos la siguiente acción para el campo gravitacional

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d\Omega \sqrt{(-g)} (R - 2\Lambda). \quad (1.31)$$

Al extremizar esta acción junto con la acción de materia S_m se obtiene las siguientes ecuaciones de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

Originalmente, Λ fue introducida por Einstein para obtener un universo estático. Más tarde Hubble demostró que el universo se estaba expandiendo y Einstein se retractó de esta sugerencia y lo denominó el error más grande de su vida (Carroll, Sean M., 1997). Conforme se fue desarrollando la Cosmología, la constante cosmológica Λ fue introducida de nuevo para explicar la fase inflacionaria del Universo, donde el universo se expande exponencialmente. Esta fase es necesaria para explicar el hecho de que el Universo posee una geometría plana en la época actual (*problema del aplanado*) y además explicar su extraordinaria isotropía a grandes escalas (*problema del horizonte*). Actualmente, la constante cosmológica es utilizada también para tratar de explicar las recientes observaciones sobre la expansión acelerada del Universo. En otras palabras, existen dos fases cosmológicas diferentes en donde se utilizan una modificación de esta misma forma.

El hecho de introducir una constante a la acción gravitacional que describe al espacio-tiempo significa que éste adquiere una curvatura que no puede ser eliminada de ninguna forma puesto que no está asociada con materia u ondas gravitacionales. La constante cosmológica puede ser explicada por el hecho de que el vacío mismo tiene una densidad de energía y un momento donde ocurren fluctuaciones en acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg de la Mecánica Cuántica.

Para resolver las ecuaciones de campo (1.32) y obtener una solución para el Universo,

³Los primeros trabajos realizados para modificar las ecuaciones de Einstein fueron realizados por Jordan e independientemente por Einstein y Bergmann. Jordan junto con sus colaboradores (Brans, 2005) estudiaron las teorías de Kaluza-Klein (Kaluza, 1921) con la posibilidad de que la componente de una métrica de 5 dimensiones fuera un espaciotiempo escalar dando como resultado una constante gravitacional variable. Independientemente Einstein y Bergmann (Einstein & Bergmann, 1938) trabajaron en una idea similar sin llegar a publicarse. Posteriormente, Brans y Dicke (Brans & Dicke, 1961) obtuvieron algo similar pero basado en el Principio de Mach, donde la distribución de la masa en el universo debe de determinar las propiedades inerciales locales.

se considera la métrica de Robertson-Walker (Misner et al., 1973)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2) \right], \quad (1.33)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y nos dice como convertir distancias coordenadas en distancias físicas como función del tiempo t y k siendo la curvatura del espacio. Y considerando el modelo de un fluido perfecto para la materia y energía del Universo,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (1.34)$$

donde ρ y p son la densidad de masa y presión respectivamente. Se obtiene las ecuaciones denominadas de Friedmann (Misner et al., 1973)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p/c^2) + \frac{1}{3}\Lambda, \quad (1.35)$$

y

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda. \quad (1.36)$$

Aquí $\dot{\quad} := (d/dt)$. Cuando p y ρ son nulas, es decir, ausencia de masa y energía, el término de Λ es el único no nulo, existiendo una evolución acelerada del factor de escala. El hecho de que las propiedades cuánticas del vacío produzcan una constante cosmológica es la siguiente. Considerando que el vacío tiene una densidad de energía ρ_v y que tiene una presión p_v . Si un volumen V de vacío es expandido por δV mediante un proceso adiabático, entonces por la primera ley de la Termodinámica, la energía interna por unidad de masa $\delta\epsilon = -p\delta V$. Por otra parte al expandir el volumen, se gasta una energía $\delta\epsilon = -\rho_v c^2 \delta V$. De aquí se sigue que (Zeldovich, 1986)

$$p_v = -\rho_v c^2, \quad (1.37)$$

entonces la presión p_v es negativa. Esta propiedad puede ser interpretado como la constante cosmológica de esta forma. Considerando la ecuación de Friedmann (1.35) sin la constante cosmológica propiamente, es decir, incluyendo la densidad de energía del vacío ρ_v y la presión del vacío p_v , además de considerar como polvo a la materia ($p = 0$) se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \rho_v + 3p_v/c^2). \quad (1.38)$$

Usando ahora, la ecuación (1.37) en la ecuación (1.38) se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{8}{3}\pi G\rho_v. \quad (1.39)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (1.35)

$$\Lambda = 8\pi G\rho_v \quad (1.40)$$

De aquí que Λ es una consecuencia de las propiedades del vacío. Para obtener la fase inflacionaria, se debe considerar que en este punto el universo está dominado por la constante cosmológica por lo que es válido considerar a $\rho = p = 0$. Por otra parte la curvatura del espacio es plano, $k = 0$, ya que es este caso es el de interés. Tomando en cuenta estas consideraciones y que $\Lambda > 0$ se resuelve la ecuación (1.36), obteniendo la solución

$$a \propto \exp\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right]. \quad (1.41)$$

De esta manera se afina la solución, para que en alguna época del universo exista un crecimiento exponencial como lo predice el modelo inflacionario.

§1.4. Modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert para obtener modelos de expansión acelerada sin inflación

Como se vió en la sección §1.2, no existe un camino a priori para determinar la acción del campo gravitacional S_g . Sin embargo, con argumentos físicos coherentes se puede llegar a una propuesta razonable. En este caso además del escalar de Ricci R , existen otros escalares relativistas que podrían estar en la acción: $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, funciones de R y funciones de éstos mismos (Navarro & Van Acoleyen, 2005). Sin embargo, el escalar de Ricci era la elección más simple y tenía un éxito parcial respecto de los experimentos en el sistema solar. Por lo tanto, los demás términos fueron rechazados. Esta razón no es un argumento físico fundamental para restringirse al escalar de Ricci R en la acción del campo gravitacional. Más aún, es probable que adicionando términos en que intervengan escalares relativistas o potencias de R en la acción del campo gravitacional, se acerque a una representación más realista de la gravitación. De hecho, para obtener una expansión exponencial del universo se han considerado modificaciones distintas de añadir una constante cosmológica a la acción S_g .

A continuación se mostrará que es posible obtener un crecimiento exponencial del

universo modificando la acción del campo gravitacional de la siguiente forma (Starobinsky, 1980)

$$S_g = -\frac{1}{k} \int f(R) \sqrt{-g} d\Omega, \quad (1.42)$$

donde f es una función arbitraria del escalar de Ricci. El hecho de que la función f sea distinta de la función identidad y esté en la acción gravitacional puede asociarse como una curvatura mayor del espacio tiempo al interactuar con la materia y energía. Posteriormente, se describirá con detenimiento este tipo de modificación de la acción del campo gravitacional. Por ahora solo se considerará a las ecuaciones de campo de la acción S_g que están dadas por (Capozziello, 2002)

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - f'(R)_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu}f'(R)_{;\alpha}^{\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.43)$$

La función f se considera de la forma $f(R) = R^n$ y usando la traza de la ecuación (1.43), resulta que

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{2n-1}{6n} \right) g_{\mu\nu}R + (n-1)R^{-1}R_{;\mu\nu} + (n-1)(n-2)R^{-2}R_{;\mu}R_{;\nu} + \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T \right]. \quad (1.44)$$

Ahora, consideremos que el tensor de energía momento sea nulo. Ésto último es válido porque se quiere encontrar un valor para n donde se obtenga un crecimiento exponencial del factor de escala $a(t)$ que sea independiente de la materia. Además es viable suponer que en esta época predomina esta curvatura. Por lo tanto, usando la métrica (1.33) en la ecuación (1.44), la componente- rr está dada por

$$\left[\frac{2n-1}{n} - 1 \right] \frac{\ddot{a}}{a} + \left[\frac{2n-1}{n} - 2 \right] \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 0 \quad (1.45)$$

El factor de escala $a(t)$ está dada por $a(t) = c \exp(c_1 t)$, donde c y c_1 son constantes. Como resultado, la ecuación (1.45) da lugar a una ecuación algebraica

$$\frac{(n-1)-1}{n} = 0. \quad (1.46)$$

De aquí se sigue que $n = 2$. Por lo tanto, resulta que la acción del campo gravitacional debe ser de la forma (Starobinsky, 1980; Barrow & Ottewill, 1983)

$$\frac{c^3}{16\pi G} \int d\Omega \sqrt{-g} (-R + \alpha R^2). \quad (1.47)$$

Esta es una manera alternativa de obtener un crecimiento exponencial.

Capítulo 2

Materia oscura y teorías modificadas de gravitación

El paradigma de materia oscura ha sido propuesta para explicar inconsistencias observacionales que se presentan en diversos fenómenos astrofísicos. Este paradigma tiene todavía mucho terreno que recorrer. Algunas de las preguntas relevantes de este paradigma que se han estudiado son: ¿qué es la materia oscura y cómo explicar que ésta interactúa solo gravitacionalmente con la materia bariónica? ¿Cómo está distribuída en el Universo y por qué esa forma? Respuestas se han dado a estas preguntas que a grosso modo son congruentes con las observaciones. Sin embargo, el problema principal de la materia oscura es el hecho de que no se ha detectado directamente, sino sólo a través de la interacción gravitacional. Por otro lado, también existe la idea alternativa de modificar la teoría de gravitación de Einstein, para explicar las inconsistencias observacionales y no postular la existencia de materia oscura (Milgrom, 1983a; McGaugh & de Blok, 1998; Sanders & McGaugh, 2002; Bekenstein, 1988, 2004). Con esta motivación, este capítulo está enfocado a dar algunos antecedentes de lo que es el paradigma de materia oscura, así como una introducción básica de las teorías de gravitación modificadas. En la primera sección se muestra las evidencias experimentales para postular la existencia de materia oscura y la composición de ésta. En la segunda sección se analiza a MOND como una propuesta de modificación de la gravitación bosquejada de los datos observados en las curvas de rotación de galaxias espirales, sus éxitos y problemas. En la tercera sección se discute AQUAL como una posible teoría de modificación en el límite débil del campo gravitacional y que está de acuerdo con MOND y satisface todas las cualidades de una teoría física. En la cuarta sección, se muestra a RAQUAL como una generalización relativista de AQUAL y su fracaso en explicar las propiedades básicas

de lentes gravitacionales. Por último, se verá a TeVeS, como una teoría que modifica a la gravitación para explicar las inconsistencias observadas a todos los niveles de la astrofísica sin necesidad de materia oscura.

§2.1. Materia oscura

La materia oscura fué postulada por vez primera por el astrofísico Fritz Zwicky, del Instituto Tecnológico de California en 1933, quien analizó el movimiento de algunas galaxias localizadas en el cúmulo Coma. Aplicando el teorema del virial al movimiento de las galaxias en las orillas del cúmulo, estimó la masa del mismo. Zwicky encontró que muchas galaxias se estaban moviendo a velocidades sumamente altas, las cuales implicaban que el cúmulo debería desintegrarse y todas las galaxias deberían salir disparadas debido a la inmensa energía cinética (Zwicky, 1933). Sin embargo, ésto no parecía probable. Es más esta configuración dinámica parecía estable. Cuando comparó la masa estimada dinámicamente con la masa calculada mediante el número de galaxias y la luminosidad total del cúmulo, encontró que la primera era 400 veces mayor que la segunda. La fuerza gravitacional de las galaxias visibles en el cúmulo parecía ser mayor en las órbitas con velocidades grandes. Este hecho es conocido como *el problema de la masa escondida*. Basado en ésto, Zwicky infirió que debería haber alguna otra forma de materia existente en el cúmulo, que no se había detectado y que provee suficiente masa y gravitación para mantener al cúmulo unido.

Más tarde, en estudios de galaxias espirales se llegó a una conclusión similar. Resulta que la forma de los discos galácticos y la simetría de los campos de velocidades observadas en la galaxias espirales, sugieren que éstas se encuentran en equilibrio centrífugo aproximado. Ésto hace posible mapear la distribución de masa de la galaxia como función del radio, estudiando el movimiento del gas neutro. De esta manera, las curvas de rotación de galaxias, que muestran la velocidad de rotación de las estrellas como función de la distancia medida desde el centro de la galaxia, no puede ser explicada solo por materia visible.

Sin embargo, si se asume que la galaxia está compuesta por un masivo y casi esférico halo de materia oscura con masa visible concentrada en un disco en el plano ecuatorial, se puede obtener una curva de rotación como las que se observan (c.f. figura 2.1).

Además de las curvas de rotación, la materia oscura juega potencialmente un papel relevante en varios procesos astrofísicos. En etapas tempranas del universo es una clave importante en la formación de estructura. La materia oscura es crucial para el modelo cosmológico del Big Bang, las propiedades estadísticas de la estructura que se forman

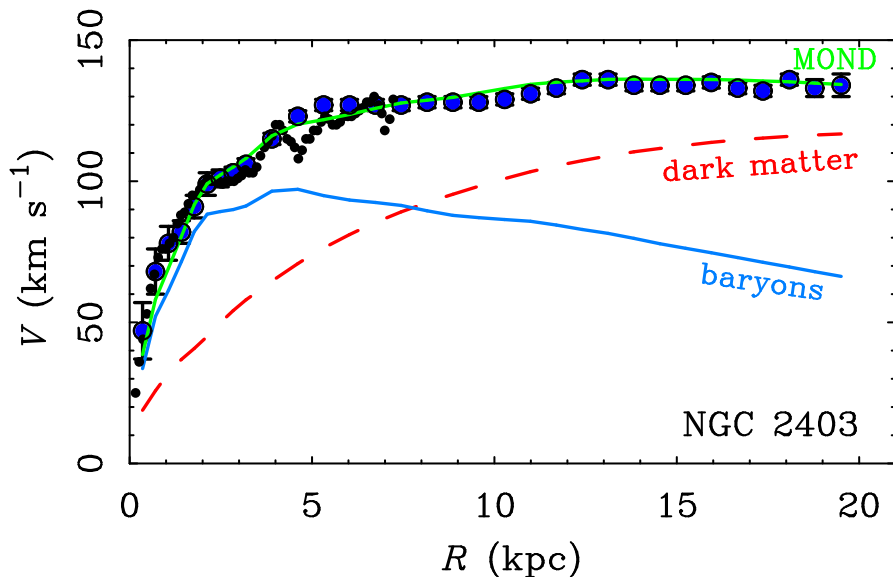


Figura 2.1: Curva típica de rotación de una galaxia espiral. La línea sólida es la curva de rotación esperada por la dinámica de Newton desde la masa barionica de la galaxia NGC2403. Los puntos grandes es una curva de rotación derivada de observaciones. La línea punteada sobre los puntos observacionales es la esperada por MOND. Esta curva de rotación fue publicada por McGaugh (2005a).

permiten restringir los parámetros del modelo cosmológico como de la tasa de expansión y la densidad crítica promedio. En particular, las mediciones en las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo en microondas han sido medidas con bastante precisión recientemente (Fixsen et al., 1996). Estas observaciones que corresponden a la etapa del universo en la cual los fotones interactuaban con la materia bariónica y el universo era un plasma de núcleos atómicos y partículas fundamentales. Los fotones interactuaban con el plasma de tal manera que lo mantenían homogéneo. Por lo tanto, no había posibilidad de que las fluctuaciones de densidad en el mismo crecieran y formaran las galaxias tal y como las vemos. El problema radica en que no hay suficiente tiempo para que estas fluctuaciones lleguen a formar las galaxias que se observan hoy en día. De manera similar, la existencia de materia oscura no-bariónica explica de manera coherente la formación de las estructuras en el universo.

Por otra parte, observaciones independientes conllevan a postular la existencia de materia oscura. Éstas consisten en estudiar la deflexión de la luz que pasa cerca de una galaxia o un cúmulo de galaxias. Un resultado bien conocido en relatividad general es que la trayectoria de un haz de luz es afectada por un campo gravitacional (Will,

1984). De hecho constituye una corroboración fundamental de esta teoría, y da lugar a un fenómeno llamado lente gravitacional. Éste consiste en que la luz de una galaxia lejana al pasar por una galaxia o un cúmulo de galaxias modifica su trayectoria . Sin embargo, la deflexión de la luz predicha por la teoría general de la relatividad difiere de la observada. Para ajustar las observaciones se postula la existencia de materia oscura (Sumner, 2002). Cálculos de las observaciones en curvas de rotación de galaxias, lentes gravitacionales y formación de estructura, estiman que 85 – 95 % de la masa del universo es materia oscura. Sin embargo, no hay ninguna evidencia directa de su existencia. Más aún , no se sabe en sí que es la materia oscura, a pesar de haberse realizado una fuerte cantidad de experimentos (Sumner, 2002).

Existen varios tipos de materia oscura que han sido postuladas.

Materia Oscura Caliente (Hot Dark Matter) .

Consiste de partículas que viajan a velocidades relativistas. Un candidato a este tipo de materia es el neutrino cuya velocidad es 1 ó 2 órdenes de magnitud abajo de la velocidad de la luz. El neutrino tiene poca masa y no interactúa via electromagnetismo ni la fuerza nuclear fuerte, por lo que son difíciles de detectar. Éste es el clásico y único ejemplo de materia oscura detectada. Sin embargo, los neutrinos solo tienen una pequeña contribución a la materia oscura (Croft et al., 1999).

Materia Oscura Fría (Cold Dark Matter) .

Para explicar las estructuras del Universo, es necesario postular otro tipo de materia oscura (no-relativista) cuya velocidad no es relativista. Parte de esta materia se incluyen materia bariónica y elementos químicos pesados. Sin embargo, estos contribuyen en una parte pequeña. Los candidatos posibles son los objetos conocidos como MACHOs (massive compact halo objects). Sin embargo, estudios de la nucleosíntesis muestran que esto solo pueden tener una pequeña contribución de la materia oscura.

Materia Oscura Tibia (Warm Dark Matter) .

Entre estos dos límites de velocidades, se encuentra la materia oscura tibia. Este tipo de materia puede ser relevante en la etapa de formación de estructura del Universo. Los posibles candidatos de este tipo de materia provienen de los modelos de física de partículas. Un ejemplo es el gravitino que es la pareja supersimétrica del graviton. Otro posible candidato es el neutrino estéril que se suma a la teoría electrodébil estándar.

En el presente, se cree que la materia oscura fría consiste en materia no-bariónica. La

propuesta más común son los axiones que surgen de la teoría de las interacciones fuertes entre quarks, SIMPSs (Strongly Interacting Massive Particles) y WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles), que no forman parte del modelo estandar de física de partículas sino de teorías de supersimetría (Turner, 1999). Los WIMPs son partículas hipotéticas que interactúan a través de la fuerza nuclear débil y la gravitación y posiblemente por otras interacciones más débiles. No pueden ser vistos directamente, puesto que no interactúan a través del electromagnetismo ni tampoco de la fuerza nuclear fuerte, por lo que no reacciona con el núcleo atómico. Una ventaja de los WIMPs es que son partículas masivas comparadas con las partículas del modelo estándar. De lo anterior se sigue que los WIMPs son considerados candidatos de materia oscura. En la teoría de Supersimetría, el candidato a la materia oscura es el neutralino. Otros candidatos a la materia oscura son los campos escalares. Suponiendo la existencia de éstos, es posible explicar las curvas de rotación planas. Se ha puesto de manifiesto que este campo escalar puede ser importante en escalas cosmológicas (Bernal & Matos, 2005).

En la actualidad existen varios proyectos para detectar los WIMPs, el neutralino y el neutrino estéril. Sin embargo estos no se han sido detectados (Cooley, 2006). A pesar de esto, no existe un candidato definitivo de la materia oscura. Por lo que sigue siendo un campo abierto en la astrofísica.

§2.2. MOND (Dinámica Newtoniana Modificada)

El paradigma de materia oscura es la única solución que se puede concebir si aceptamos la teoría de gravitación estandar como válida a toda escala macroscópica. Sin embargo, a pesar de que la teoría general de relatividad ha sido siempre verificada experimentalmente con éxito, sucede que estas pruebas no han sido hechas en escalas mayores a las del sistema solar (Will, 1984), cuyo tamaño es (~ 1 kpc). Debido a que las anomalías observadas y que postulan materia oscura resultan ocurrir en objetos de dimensión mucho mayor ($\sim 20 - 35$ kpc), es entonces factible pensar que probablemente se tengan que hacer modificaciones a las teorías de gravitación estandar. De hecho, si suponemos que pueden existir modificaciones de la gravitación, entonces la materia oscura no necesariamente es la única solución para explicar las discrepancias dinámicas de las observaciones, así como las cosmológicas.

Como se vió en la secciones §1.3-§2.1, la teoría de gravitación de Einstein, que incluye la de gravitación de Newton en su aproximación a campo débil, es aceptada. Y no es de sorprenderse puesto que ha sido comprobada en la tierra y en escalas no mayores a las del sistema solar. Sin embargo, no necesariamente es válida a nivel galáctico o extragaláctico

y sobretodo en las etapas tempranas del Universo. Un ejemplo se mostró en la sección §1.4 donde con una modificación a la acción del campo gravitacional era posible explicar el problema del horizonte en cosmología.

Los cálculos alrededor de la dinámica en las galaxias y cúmulos de galaxias, están basados en suponer válida a la teoría de gravitación de Newton, y la existencia de materia oscura. Existen varias propuestas para modificar la gravitación newtoniana que dependen del valor de cierto parámetro. Una de las más existosas ha sido MOND (Modified Newtonian Dynamics), propuesta por Milgrom en 1983 (Milgrom, 1983b). Ésta puede ser vista como una modificación de la ley de gravitación universal de Newton o a la dinámica newtoniana en un nuevo límite de aceleración. Esta propuesta consiste en lo siguiente. Supongamos que una partícula de prueba se encuentra a una distancia r de una distribución de masa. La aceleración que produce el campo gravitacional sobre la partícula de prueba está dada por (Milgrom, 1983a)

$$\mu \left[\frac{|\mathbf{a}|}{a_0} \right] \mathbf{a} = \mathbf{g}_N, \quad (2.1)$$

donde a_0 es un constante con dimensiones de aceleración del orden de 10^{-8}cm/s^2 que curiosamente es $\sim cH_0$, donde H_0 es la constante de Hubble. Y \mathbf{g}_N es la aceleración gravitacional producida por la distribución de masa predicha por Newton. La función $\mu(x)$ es tal que $\mu(x) \approx x$ para $x \ll 1$ y $\mu(x) = 1$ si $x \gg 1$. Este último límite corresponde a la gravitación newtoniana.

El hecho de proponer la ecuación (2.1) tiene consecuencias inmediatas. La primer consecuencia es que a radios grandes alrededor de una masa M , en una orbita circular la velocidad de rotación llega ha ser independiente del radio. Para mostrar ésto, basta con utilizar el hecho de que $|\mathbf{a}| = v^2/r$ para una órbita circular plana y que $|\mathbf{g}_N| = GM/r^2$ para una distribución de masa esférica. De esta manera, en el límite de MOND, se obtiene que

$$v^4 = MG a_0. \quad (2.2)$$

Consecuentemente, en una órbita circular lejana del centro de la galaxia, la velocidad de rotación no depende de la distancia r , por lo que la curva de rotación es plana. Además de aquí se sigue que la velocidad está a la cuarta potencia con respecto a la masa M , siendo razonablemente consistente con la famosa relación empírica de Tully-Fisher (Tully & Fisher, 1977). Esta ley empírica proveniente de observaciones de las galaxias espirales, implica que la luminosidad L de la galaxia y la velocidad de rotación v están relacionadas

por¹

$$L \propto v^4. \quad (2.3)$$

Otra consecuencia de MOND es la siguiente: Según la ecuación (2.1), la ley de gravitación universal deja de ser válida a partir de cierto valor de la aceleración a_0 . Como consecuencia, existe un valor crítico de la densidad la masa de superficial $\Sigma_m \approx a_0/G$. De hecho, en sistemas donde $\Sigma \geq \Sigma_m$, existe una pequeña discrepancia de la masa visible y la masa estimada por la dinámica de Newton, dentro del disco óptico, debido a que las aceleraciones son mayores a a_0 (Sanders & McGaugh, 2002). Estas galaxias son de alto brillo superficial (High Surface Brightness Galaxies). En cambio en galaxias como las LSB's (Low Surface Brightness Galaxies), las aceleraciones internas son mucho menores a a_0 , por lo que debería de existir una gran discrepancia entre la masa visible y la masa dinámica. En otras palabras, estas galaxias están completamente dominadas por MOND. Milgrom predijo este comportamiento, antes de que hubieran sido observadas las galaxias LSB (McGaugh & de Blok, 1998; McGaugh, 2005b). Además, MOND ha sido útil en la dinámica de 10^2 galaxias espirales de todos los tamaños y reproduce las curvas de rotación de las mismas con un parámetro ajustable por galaxia que resulta ser el cosciente masa-luminosidad M/L (Sanders & McGaugh, 2002). A diferencia de MOND, los modelos de materia oscura requieren por lo menos otro parámetro para ajustar las observaciones (Carignan, 1989).

MOND también puede explicar el movimiento anómalo de las sondas espaciales Pionero 10 y 11 (Anderson et al., 1998), las cuáles presentaban una aceleración mayor de la esperada por la teoría de gravitación de Newton. MOND puede explicar esta anomalía de manera natural pues resulta que un objeto cuya aceleración es menor que a_0 , debería sentir una aceleración de la forma $(a_0 GM_\odot/r^2)^{1/2}$. Sin embargo, esto no es un argumento contundente a favor de MOND, puesto que este movimiento anómalo puede ser explicado también por otras razones. Además la teoría de la relatividad general es medible a estas escalas.

A pesar de todas éstas predicciones, MOND no puede ser tomada como una teoría física fundamental. Ésto se debe a varias consideraciones. Primero porque es una modificación en el límite newtoniano, y no a nivel relativista. Por lo tanto, no puede explicar la deflexión anómala asociada con lentes gravitacionales en cúmulo de galaxias. Segundo, si se considera un sistema de partículas que interactúan gravitacionalmente se pueden llegar a violar la conservación del momento y la del momento angular (Felten, 1984).

¹En estudios recientes se ha mostrado que la potencia de la velocidad de rotación varía de 3 a 4 .

§2.3. AQUAL (Aquadratic Lagragian Theory)

Como se vió en la sección §2.2. MOND no puede ser considerada como una teoría fundamental, sino como una relación empríca que en algunos casos resume bien la fenomenología de las galaxias. Sin embargo, puede ser utilizada como un primer paso hacia una teoría de campo fundamental.

La manera más natural de actuar es proponiendo una teoría de gravitación modificada no relativista que explique MOND y resuelva los problemas de conservación. La modificación debe de hacerse entonces en la acción para el campo gravitacional. De esta manera es posible garantizar la conservación de la energía y el momento como consecuencias inmediatas de las simetrías innatas del lagrangiano. La ecuación de Poisson (c.f. (1.1)) puede ser derivada a partir de la acción (Landau & Lifshitz, 1975)

$$S_g = - \int dt dV [\rho \phi_N + (8\pi G)^{-1} (\nabla \phi_N)^2], \quad (2.4)$$

donde ρ es la densidad de masa y ϕ_N es el potencial gravitacional producido por ρ de manera newtoniana. Una modificación general a (2.4) es (Bekenstein & Milgrom, 1984)

$$S_g = - \int dt dV \left\{ \rho \phi_A + (8\pi G)^{-1} a_0^2 F \left[\frac{(\nabla \phi_A)^2}{a_0^2} \right] \right\}, \quad (2.5)$$

donde $F(x^2)$ es una función arbitraria y ϕ_A es el potencial gravitacional “efectivo”, en el sentido que $\mathbf{a} = -\nabla \phi_A$. La constante a_0 aparece en todos los casos excepto en el newtoniano que corresponde a $F(x) = x$.

Variando S_g respecto a ϕ_A , y usando el hecho de que ϕ_A tiene un valor nulo en infinito, se obtiene las siguientes ecuaciones de campo:

$$\nabla \cdot \left[\mu \left(\frac{|\nabla \phi_A|}{a_0} \right) \nabla \phi_A \right] = 4\pi G \rho, \quad (2.6)$$

con $\mu := F'(x^2)$. Con ésto y como para un potencial no modificado $\nabla \phi_N = -\mathbf{g}_N$, las ecuaciones de campo (2.6) se pueden escribir alternativamente en términos de un campo newtoniano para la misma distribución de masa que satisface la ecuación de Poisson (1.1), es decir,

$$\nabla \cdot \left[\mu \left(\frac{|\nabla \phi_A|}{a_0} \right) \nabla \phi_A - \nabla \phi_N \right] = 0. \quad (2.7)$$

De aquí se sigue que

$$\mu \left(\frac{|\mathbf{a}|}{a_0} \right) a = g_N + \nabla \times \mathbf{h}, \quad (2.8)$$

donde \mathbf{h} es un campo vectorial. El término del rotacional de \mathbf{h} se puede considerar como una corrección a MOND, el cual converge a éste de tal manera que cumple con las leyes de conservación necesarias. Sin embargo, se puede mostrar que este término es despreciable en sistemas con simetría esférica (Bekenstein & Milgrom, 1984).

A pesar de las ventajas conceptuales de AQUAL, esta descripción no reproduce con precisión la fenomenología de los cúmulos de galaxias (Sanders & McGaugh, 2002; Bekenstein, 2005). Además, el hecho de ser una descripción netamente newtoniana, no puede explicar los fenómenos de lentes gravitacionales, así como algunos fenómenos cosmológicos.

§2.4. RAQUAL (versión relativista de AQUAL)

La formulación relativista de AQUAL fue propuesta por Bekenstein y Milgrom en 1984. La idea básica es reemplazar el potencial ϕ_A por un campo escalar φ cuya ecuación es una generalización de (2.6). La teoría en sí puede dar dos formulaciones equivalentes donde intervienen un tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y un campo escalar φ . En una, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ satisface las ecuaciones de Einstein, pero las partículas de prueba no siguen geodésicas de $g_{\mu\nu}$. Mientras que en la otra formulación, las partículas siguen geodésicas de una métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, pero no satisface las ecuaciones de Einstein. Tales métricas están relacionadas con la transformación conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = \exp(2\varphi) g_{\mu\nu}$ ². Considerando la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ como la métrica física, entonces, las ecuaciones de campo son derivables de la acción

$$S = S_g + S_\varphi + S_m, \quad (2.9)$$

donde la acción gravitacional S_g está dada por

$$S_g = \frac{c^4}{16\pi G} \int d\Omega \exp(-2\varphi/c^2) \left[R(\tilde{g}_{\mu\nu}) + 6c^{-4} \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi \right] (-g)^{1/2}, \quad (2.10)$$

y la acción del campo escalar S_φ es

$$S_\varphi = -\frac{1}{8\pi L^2 G} \int d\Omega (-g)^{1/2} \tilde{F} \left(L^2 g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \right). \quad (2.11)$$

²Una transformación conforme es una función que preserva ángulos. De manera más formal, una transformación $w : z \rightarrow f(z)$ es llamada conforme en el punto z_0 si preserva ángulos orientados entre dos curvas que se intersectan en z_0 .

Aquí, $\tilde{F}(x) \approx x$ para $x \gg 1$ y $\tilde{F}(x) \approx x^{3/2}$ para $x \ll 1$ es una función a priori desconocida y L es una constante. La acción de una partícula libre es $S_m = -mc^2 \int d\tau$, donde τ es el tiempo propio, congruente con la métrica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ siendo posible el recuperar AQUAL en el límite del campo débil y velocidades bajas. Es bien conocido que el límite no-relativista está gobernado por la componente temporal de la métrica g_{00} , dada por la ecuación (1.3). De acuerdo con la transformación conforme entre las dos métricas, la componente temporal $\tilde{g}_{00} = 1 + 2\phi_N + \varphi$, en el mismo límite de aproximación. Por lo tanto $\phi_A = \phi_N + \varphi$, que representa el potencial gravitacional no relativista. Justo en este límite se recupera la forma de AQUAL.

Sin embargo, RAQUAL falla en dos cosas. Permite propagación superlumínica de las ondas de φ y es incapaz de explicar la anomalía de la deflexión de la luz observada en lentes gravitacionales (Bekenstein, 1993). Esta última propiedad se debe a la relación conforme de las métricas, la cual deja invariante la trayectoria de luz predicha por la teoría de la relatividad general de Einstein.

§2.5. TeVeS

TeVeS es una teoría de campo **T**ensor-**V**ector-e**S**calar (Bekenstein, 2004) y tal como RAQUAL, la métrica física $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ está relacionada con una métrica $g_{\alpha\beta}$ que es congruente con las ecuaciones de campo de Einstein, pero además con un vector temporolode \mathcal{U}_α de la siguiente manera

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + 2\mathcal{U}_\alpha\mathcal{U}_\beta) - e^{2\phi}\mathcal{U}_\alpha\mathcal{U}_\beta, \quad (2.12)$$

y satisface la relación $g_{\alpha\beta}\mathcal{U}_\alpha\mathcal{U}_\beta = 1$. La dinámica del campo vectorial está dada por la acción

$$S_\nu = -\frac{K}{32\pi G} \int d\Omega (-g)^{1/2} \left[g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \mathcal{U}_{[\alpha,\mu]} \mathcal{U}_{[\beta,\nu]} - 2(\lambda/K)(g^{\mu\nu} \mathcal{U}_\nu \mathcal{U}_\mu + 1) \right]. \quad (2.13)$$

Aquí los paréntesis cuadrados denotan antisimetrización, K es un parámetro de la teoría y λ es un multiplicador de Lagrange para normalizar al vector \mathcal{U}_α .

La ecuaciones dinámicas para el campo escalar ϕ quedan determinadas por la acción

$$S_\phi = -1/2 \int [\sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + 1/2 G \ell^{-2} \sigma^4 F(kG\sigma^2)] (-g)^{1/2} d\Omega, \quad (2.14)$$

que involucra un campo escalar no-dinámico σ , a un parámetro k sin dimensiones, a un parámetro escalar ℓ y una función adimensional F . Nótese que en el primer término

$\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}$ está contraído con $h^{\alpha\beta} := g^{\alpha\beta} - \mathcal{U}^\alpha\mathcal{U}^\beta$ en vez de $g^{\alpha\beta}$, como sucede en RAQUAL. Ésto no permite la propagación superlumínica de las perturbaciones del campo, para $\phi \geq 0$.

Además de estas acciones, se tienen que adicionar la acción geométrica S_g , utilizando el escalar de Ricci de $g_{\mu\nu}$ tal y como aparece en la acción de Einstein-Hilbert (c.f. (1.17)). Esta elección es hecha para que TeVeS sea semejante a relatividad general. La acción de la materia S_m obedece al principio de equivalencia de Einstein (Will, 1984). Por lo tanto, ésta puede estar construida de tal manera que se pueda reemplazar $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}$ en cualquier parte de la acción de la materia modificando así las derivadas covariantes apropiadas a $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

TeVés tiene como límite a la relatividad general para $K \rightarrow 0$ y $\ell \rightarrow \infty$ (Bekenstein, 2004). Por lo que si $|K| \ll 1$ y la escala de ℓ es lo bastante grande, las predicciones de TeVeS y de la relatividad general no difieren mucho. TeVeS también puede converger a MOND haciendo una elección apropiada de F en la ecuación (2.14). Variando esta acción respecto de σ , se obtiene

$$-kG\sigma^2 F - 1/2 (kG\sigma^2)^2 F' = k\ell^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} \quad (2.15)$$

donde $F' \equiv dF(\mu)/d\mu$. La función $\mu(y)$ esta definida por

$$-\mu F(\mu) - \frac{1}{2} \mu^2 F'(\mu) = y. \quad (2.16)$$

De esta expresión se sigue que $kG\sigma^2 = \mu(k\ell^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta})$. Esta elección queda determinada por la siguiente relación equivalente

$$k\ell^2 h^{\mu\nu} \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} = (3/4)k^2 G^2 \sigma^4 (kG\sigma^2 - 2)^2 (1 - kG\sigma^2)^{-1}. \quad (2.17)$$

Las ecuaciones tipo Einstein que resultan de TeVeS linearizadas para un espacio-tiempo plano en una situación quasi-estática implican que el resultado final para la métrica física es

$$ds^2 = -(1 + 2\varphi)dt^2 + (1 - 2\varphi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad \text{con} \quad \varphi := \Xi\phi_N + \phi, \quad (2.18)$$

donde ϕ_N es el potencial newtoniano convencional de la materia bariónica y Ξ es una constante cercana a uno que depende de K y del valor asintótico del escalar de ϕ .

Si φ se interpreta como el potencial gravitacional físico, entonces la métrica (2.18) es precisamente la utilizada en relatividad general para discutir la dinámica de galaxias y lentes gravitacionales. Una consecuencia inmediata de ésto es que si la relatividad

general puede reproducir la dinámica de una galaxia y sus propiedades como lente con una distribución de materia oscura asumida y TeVeS puede predecir la dinámica de la galaxia en cualquier parte con solo la distribución de materia bariónica, entonces ésta última puede reproducir las propiedades de lentes gravitacionales como en la relatividad general.

La manera de determinar φ es fijando el campo ϕ . Para esto se utiliza la ecuación de TeVeS análoga a AQUAL y se asume simetría esférica en el sistema. De esta manera, se puede integrar dicha ecuación una vez y obtener (asumiendo $k \ll 1$ y $\Xi \approx 1$)

$$\mu \nabla \Phi = \nabla \Phi_N, \quad \text{con} \quad \mu \approx \frac{-1 + \sqrt{1 + 4|\nabla \Phi|/a_0}}{1 + \sqrt{1 + 4|\nabla \Phi|/a_0}} \quad \text{y} \quad a_0 \approx \frac{\sqrt{3k}}{4\pi\ell}. \quad (2.19)$$

Por lo tanto se obtiene MOND (c.f.(2.1)) así como una fórmula adecuada para μ mostrando un comportamiento apropiado según el tamaño de $|\nabla \Phi|/a_0$ y a_0 en términos de los parámetros de TeVes. A pesar de esto, se ha visto que las curvas de rotación de Galaxias no son del todo consistentes con esta μ (Famaey & Binney, 2005). Además esta formulación empieza a fallar en aplicaciones extragalácticas cuando $|\nabla \Phi| > (\pi/k)^2 a_0$.

Capítulo 3

Teorías métricas $f(R)$ de gravitación

En la sección §2.5, se mostró que TeVeS es una de las más prometedoras teorías alternativas al paradigma de materia oscura. Sin embargo, hay que reconocer que es una teoría bastante complicada puesto que acopla un campo escalar, un campo vectorial y un campo tensorial. Además de contar con tres parámetros que están relacionados de distinta forma entre ellos, dependiendo del límite del campo gravitacional que se esté tratando.

Una manera más natural para encontrar una teoría fundamental es modificando la acción de Einstein-Hilbert. Hilbert fué quien propuso por vez primera la acción del campo gravitacional, usando la elección más sencilla, el escalar de Ricci R . Sin embargo, como se vió en el capítulo 1 no existe un fundamento fuerte que límite esta elección, permitiendo considerar cualquier función $f(R)$.

En este capítulo se da una descripción general de las teorías métricas $f(R)$ en la acción del campo gravitacional y argumentos para considerarlas una buena propuesta. En contraste presentamos un posible problema genérico de una teoría métrica, el cual consiste que esta misma no puede explicar a la vez MOND y lentes gravitacionales. En la primera sección se analiza los principios que debe cumplir una propuesta de gravitación. En la segunda sección se deriva las ecuaciones que produce una modificación $f(R)$ en la acción gravitacional, como consecuencia inmediata esta misma cumple con la mayoría de los principios fundamentales de una teoría física. En la tercera sección se muestra que las ondas generadas por el campo gravitacional son lumínicas para una $f(R) = R^n$ siendo n cualquier número. En la cuarta sección, se muestra el argumento sobre el posible problema genérico de las teorías métricas.

§3.1. Principios

Una teoría modificada de Gravitación, en general debe cumplir con ciertos principios, que al menos hasta ahora sean congruentes con los experimentos realizados sobre la misma y que al tomarlos en cuenta simplifican y reducen las propuestas para una modificación coherente. Los principios son los siguientes (Bekenstein, 2004):

- **Principio de Mínima Acción.** La teoría debe ser derivable de la variación de la acción del campo gravitatorio y la materia, automáticamente garantizando la conservación de momento-energía. Las ecuaciones de Einstein, por ejemplo, se obtuvieron variando la acción Einstein-Hilbert (c.f. (1.17)).
- **Invariancia Relativista.** Indudablemente, por lo menos a nivel sistema solar, y en experimentos de partículas elementales, se ha mostrado evidencia directa de la validez de la relatividad especial. Por lo tanto, la acción debe ser un escalar relativista por lo que todas las ecuaciones de la teoría deben ser invariantes. Un resultado inmediato, es el principio de correspondencia donde la teoría debe predecir resultados muy parecidos a los de la relatividad especial justo cuando la gravitación es despreciable.
- **Principio de Equivalencia.** Una teoría modificada debe respetar el principio de equivalencia. Por lo menos a la versión débil del mismo que se ha demostrado en el experimento de Eötvös-Dicke-Braginsky con gran precisión. El principio de equivalencia débil supone que las partículas libres se mueven en un campo gravitacional a lo largo de trayectorias universales, es decir obedece a una ecuación geodésica de la métrica (incluso la luz). Para movimientos no-relativistas la ecuación que contiene esta universalidad es $a = -\nabla\phi$. Hay que añadir también, que el principio de equivalencia (versión fuerte) supone que la métrica $g_{\mu\nu}$ describe las propiedades del espacio tiempo en la presencia de gravitación dando lugar a la conjetura de Shiff (Shiff, 1960), la cual dice que la teoría debe ser una teoría métrica de gravitación¹.
- **Causalidad.** No se debe violar la causalidad, es decir, la teoría debe de ser consistente. Las ecuaciones de campo derivadas desde la acción no deben permitir propagación superlumínica de cualquier campo medible o de energía y momento.
- **Positividad de Energía.** En casi todas las teorías clásicas de campo que intervienen en la física, la energía total es la integral de una densidad de energía

¹Una teoría de gravitación se considera métrica si se asume que (i) el tensor métrico es simétrico, (ii) las partículas de prueba siguen geodésicas de la métrica y (iii) en sistemas de referencia localmente planos, las leyes de la física no-gravitacionales son como en la relatividad especial.

positiva T_{00} . En la relatividad general, la situación es diferente, aún en el caso de campo débil, no hay un camino satisfactorio para definir la densidad de energía del campo gravitacional. A pesar de que no se puede definir de manera convincente la densidad de energía local, si se puede definir la densidad global de energía de un sistema dando lugar al teorema de energía positiva (Witten, 1981). Si asumimos la condición de energía dominante: *Para cualquier vector de campo causal \mathbf{Y} que apunta hacia el futuro (aún un vector nulo o temporolode), el vector $-T_{\beta}^{\alpha}Y_{\beta}$ debe ser un vector de campo causal que apunta hacia el futuro.* En otras palabras, el flujo de masa-energía nunca puede ser observado más rápido que la velocidad de la luz. Entonces el teorema de la positividad de la energía se puede enunciar de la siguiente manera. *La masa de un espacio tiempo asintóticamente plano es no negativa. Más aún, la masa es cero en el espacio tiempo de Minkowski.* De esta forma es posible definir la energía total de un sistema gravitacional en términos del comportamiento asintótico del campo gravitacional. Lo más natural es suponer que cualquier propuesta de gravitación cumpla con este principio.

Además de cumplir con estos principios, cualquier propuesta debe ser capaz de reproducir la fenomenología astrofísica como la que se observa en galaxias y cúmulos de galaxias, así como la de los lentes gravitacionales, y formación de estructura. Por otra parte, también tiene que predecir la existencia de ondas gravitacionales.

§3.2. Propiedades generales de las teorías $f(R)$

Las teorías métricas de gravitación $f(R)$, de entrada cumplen con la mayoría de los principios expuestos en la sección anterior como consecuencia de que es una teoría de campo derivada a partir del principio de mínima acción.

Existen además dos razones por la que se han estudiado y se han considerado. Primero porque no existe una razón *a priori* para restringirse a R en la acción gravitacional. Es más, se espera que incluyendo potencias de R e invariantes relacionadas dieran un representación más realista de la gravitación cerca de singularidades i.e. $R \rightarrow \infty$. Segundo, algunas correcciones cuánticas son equivalentes a aumentar términos a la acción gravitacional (cf. sección §1.3, Starobinsky (1980)). De esta manera se espera que los términos que son de mayor orden a R adicionales en la acción, sujetos a posibles constricciones, crearían una primera aproximación a alguna teoría cuántica de gravitación. Lo anterior motiva a proponer la siguiente acción para el campo gravitacional (cf. Capozziello

(2002); Capozziello et al. (2004, 2003) y sección §1.4):

$$S_g = \int -\frac{1}{k} [f(R)\sqrt{-g}] d\Omega, \quad (3.1)$$

donde $k = 16\pi G/c^3$ es una constante de acoplamiento y f es a priori una función arbitraria. Las ecuaciones de campo se obtienen variando la acción del campo gravitacional (3.1) más la acción de la materia (Landau & Lifshitz, 1975) respecto de las componentes de la métrica $g^{\mu\nu}$. De esta manera se obtiene que

$$\delta S = -\frac{1}{k} \int d\Omega [f(R)\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}f'(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}] + \delta S_m, \quad (3.2)$$

con $f'(R) := df(R)/dR$. La variación del primer término del lado derecho se obtuvo en la derivación de las ecuaciones de Einstein (cf. ecuación (1.24)). En el segundo término aparece $\delta R_{\mu\nu}$ que también se obtuvo en esta misma variación (cf. ecuación (1.23)). El primer término del lado derecho de la ecuación (3.2) puede describirse como

$$\int d\Omega \sqrt{-g} f'(R) \nabla_\alpha [g^{\mu\alpha}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) - g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)]. \quad (3.3)$$

Utilizando el teorema de Gauss y el hecho de que el campo se anula en infinito, se obtiene la siguiente expresión

$$\int d\Omega \sqrt{-g} \nabla_\alpha [f'(R)] [g^{\mu\alpha}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) - g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)]. \quad (3.4)$$

Utilizando las propiedades bien conocidas de la conexión (Landau & Lifshitz, 1975)

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda = \partial_\nu(\ln(\sqrt{-g})), \quad g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}), \quad (3.5)$$

así como la ecuación (1.24) en la ecuación (3.2), se obtiene

$$\delta S = -\frac{1}{k} \int d\Omega \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [f'(R)]_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu}[f'(R)]_{;\lambda}^\lambda + f'(R)R_{\mu\nu} \right] + \delta S_m. \quad (3.6)$$

La variación de S_m se calcula realizando el mismo desarrollo que al obtener las ecuaciones de Einstein (c.f. (1.27)). Si ahora se define el tensor de energía momento como en la ecuación (1.28) entonces se obtiene que las ecuaciones de campo son:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) = (f'(R))_{;\mu\nu} - (f'(R))_{;\lambda}^\lambda g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Las ecuaciones de campo obtenidas son por construcción invariantes pues han sido derivadas a partir de una acción propuesta. Además son ecuaciones diferenciales de cuarto orden y de la misma manera que las de Einstein, la única variable que tiene el contenido dinámico es la métrica del espacio tiempo. También relaciona la curvatura del espacio-tiempo con la distribución de energía-momento pero no de la misma forma que en las ecuaciones de Einstein. Las ecuaciones (3.7) son la generalización de las ecuaciones de campo de Einstein. Claramente la elección $f(R) = R$ reproduce estas mismas.

Nótese que la modificación ha sido realizada en el campo gravitacional por lo que las partículas de prueba viajan todavía en trayectorias que obedecen la ecuación geodesica congruente con este nuevo campo. Esto se debe a que la acción S_p de una partícula de prueba está dada por

$$S_p = -mc \int ds, \quad (3.8)$$

donde el intervalo $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$, de la misma manera que como se hace en la relatividad general (cf. apéndice A). Al variar la ecuación (3.8) se obtiene que

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (3.9)$$

donde λ es un parámetro afin de la trayectoria que en el caso de intervalos tipo tiempo y nulos puede hacerse coincidir con el tiempo propio τ .

§3.3. Ondas gravitacionales

Una teoría de gravitación debe de predecir ondas gravitacionales, puesto que se tiene evidencias (aunque no directas) de su existencia, mientras que principios de causalidad implican que la velocidad de propagación de la ondas a lo más es igual a la velocidad de la luz c . Las teorías $f(R)$ predicen la existencia de ondas gravitacionales con velocidad c en el vacío. Para mostrarlo hay que considerar un campo gravitacional débil en el vacío cuando la métrica del espacio tiempo es una pequeña perturbación de la de la de Minkowski $\eta_{\nu\mu}$, es decir,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

con $h_{\mu\nu}$ pequeñas correcciones determinadas por el campo gravitacional débil, i.e. $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

Las componentes contravariantes del tensor métrico $g^{\mu\nu}$ a primer orden de $h_{\mu\nu}$ son entonces

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

A primer orden de la perturbación el tensor de Riemann está dado por (Landau & Lifshitz, 1975)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}[h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}]. \quad (3.12)$$

La suposición de que $h_{\mu\nu}$ es pequeña deja la posibilidad de transformaciones arbitrarias del sistema de referencia de la forma $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$ de tal manera que ξ^{μ} es pequeña. Usando esta arbitrariedad de norma para el tensor $h_{\mu\nu}$, se impone la siguiente condición

$$\Psi^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0, \quad (3.13)$$

donde $\Psi^{\mu\nu} := h^{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu}h$ y $h := h^{\mu}_{\mu}$ y con la propiedad de que $\Psi = -h$. En términos de $\Psi_{\mu\nu}$, el tensor de Riemann toma la forma

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \approx \frac{1}{2}[\Psi_{\alpha\nu,\beta\mu} + \Psi_{\beta\mu,\alpha\nu} - \Psi_{\alpha\mu,\beta\nu} - \Psi_{\beta\nu,\alpha\mu}] + \frac{1}{4}[-\eta_{\alpha\nu}\Psi_{,\beta\mu} - \eta_{\beta\mu}\Psi_{,\alpha\nu} + \eta_{\alpha\mu}\Psi_{,\beta\nu} + \eta_{\beta\nu}\Psi_{,\alpha\mu}]. \quad (3.14)$$

El tensor de Ricci, a primer orden de la perturbación está dado por

$$R_{\beta\nu} \approx \frac{1}{2}[\Psi_{\alpha\nu,\beta}{}^{\alpha} + \Psi_{\beta\mu}{}^{\mu}{}_{\nu} - \Psi_{\beta\nu,\alpha}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}\Psi_{,\alpha}{}^{\alpha}]. \quad (3.15)$$

Utilizando la expresión (3.15) junto con $R = \eta^{\beta\nu}R_{\beta\nu}$ se calcula el escalar de Ricci a primer orden,

$$R \approx \frac{1}{2}[2\Psi_{\alpha\nu}{}^{\alpha\nu} + \Psi_{,\alpha}{}^{\alpha}]. \quad (3.16)$$

Las ecuaciones de campo (3.7) de una teoría $f(R)$ en el vacío (i.e con $T_{\beta\nu} = 0$) son

$$f'(R)G_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g_{\beta\nu}[f(R) - Rf'(R)] + [f'(R)]_{;\beta\nu} - g_{\beta\nu}[f'(R)]_{;\alpha}{}^{\alpha}, \quad (3.17)$$

donde $G_{\beta\nu}$ es el tensor de Einstein. La traza de estas ecuaciones de campo es

$$[f'(R)]_{;\alpha}{}^{\alpha} = \frac{2}{3}f(R) - \frac{1}{3}Rf'(R). \quad (3.18)$$

Si ahora se propone $f(R) = R^n$ donde n es cualquier número arbitrario, y utilizando la ecuación (3.18) entonces las ecuaciones (3.17) toman la siguiente forma

$$nR^{n-1}G_{\beta\nu} = -\frac{1}{6}g_{\beta\nu}(1+n)R^n + n(n-1)R^{n-2}R_{;\beta\nu} + n(n-1)(n-2)R^{n-3}R_{;\beta}R_{;\nu}. \quad (3.19)$$

Suponiendo que R es distinto de cero puesto que esta representa el caso trivial se obtiene

que

$$RG_{\beta\nu} = -\frac{1}{6}g_{\beta\nu} \left(\frac{1+n}{n} \right) R^2 + (n-1)R_{;\beta\nu} + (n-1)(n-2)R^{-1}R_{;\beta}R_{;\nu}. \quad (3.20)$$

Utilizando las ecuaciones (3.15), (3.16) y la norma (3.13), se obtiene la ecuación (3.20) a primer orden de la perturbación:

$$\begin{aligned} (\Psi_{\beta\nu}),_{\alpha}^{\alpha} &= -\frac{1}{6}\eta_{\beta\nu} \left(\frac{1+n}{n} \right) (\Psi,_{\alpha}^{\alpha}) + (n-1)(\Psi,_{\alpha}^{\alpha})^{-1}(\Psi,_{\alpha}^{\alpha}),_{\beta\nu} + \\ &+ (n-1)(n-2)(\Psi,_{\alpha}^{\alpha})^{-2}(\Psi,_{\alpha}^{\alpha}),_{\beta}(\Psi,_{\alpha}^{\alpha}),_{\nu}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

En seguida se mostrará que el lado derecho de esta última relación es cero a primer orden de aproximación. Para ésto se usa el hecho de que $\Psi = \eta^{\kappa\mu}\Psi_{\kappa\mu}$, obteniendo así la siguiente expresión

$$\begin{aligned} (\Psi_{\beta\nu}),_{\alpha}^{\alpha} &= -\frac{1}{6}\eta_{\beta\nu} \left(\frac{1+n}{n} \right) (\eta^{\kappa\gamma}\Psi_{\kappa\gamma}),_{\alpha}^{\alpha} + (n-1)(\Psi,_{\alpha}^{\alpha})^{-1}[\eta^{\kappa\gamma}(\Psi_{\kappa\gamma}),_{\alpha}^{\alpha}],_{\beta\nu} + \\ &+ (n-1)(n-2)(\Psi,_{\alpha}^{\alpha})^{-2}[\eta^{\kappa\gamma}(\Psi_{\kappa\gamma}),_{\alpha}^{\alpha}],_{\beta}[\eta^{\kappa\gamma}(\Psi_{\kappa\gamma}),_{\alpha}^{\alpha}],_{\nu}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Debido a que la derivada de $\eta_{\mu\nu}$ es cero, la ecuación toma entonces la forma

$$\begin{aligned} \eta_{\kappa\gamma}(\Psi_{\beta\nu}),_{\alpha}^{\alpha} &= -\frac{1}{6}4\eta_{\beta\nu} \left(\frac{1+n}{n} \right) (\Psi_{\kappa\gamma}),_{\alpha}^{\alpha} + 4(n-1)(\Psi,_{\alpha}^{\alpha})^{-1}[(\Psi_{\kappa\gamma}),_{\alpha}^{\alpha}],_{\beta\nu} + \\ &+ 4(n-1)(n-2)(\Psi,_{\alpha}^{\alpha})^{-2}[(\Psi_{\kappa\gamma}),_{\alpha}^{\alpha}],_{\beta}[(\Psi),_{\alpha}^{\alpha}],_{\nu}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Contrayendo los índices β y κ y usando la conmutatividad de las derivadas parciales, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} (\Psi_{\gamma\nu}),_{\alpha}^{\alpha} &= -\frac{1}{6}4 \left(\frac{1+n}{n} \right) (\Psi_{\gamma\nu}),_{\alpha}^{\alpha} + 4(n-1)(\Psi,_{\alpha}^{\alpha})^{-1}[(\Psi_{\gamma}^{\beta}),_{\beta}^{\alpha}],_{\alpha\nu} + \\ &+ 4(n-1)(n-2)(\Psi,_{\alpha}^{\alpha})^{-2}[(\Psi_{\gamma}^{\beta}),_{\beta}^{\alpha}],_{\alpha}[(\Psi),_{\alpha}^{\alpha}],_{\nu}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Utilizando, la norma (3.13), los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación (3.24) son cero. Los términos que quedan son precisamente la ecuación de onda con una velocidad de propagación c .

Se considera ahora una perturbación débil $h_{\mu\nu}$, en una métrica curva ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$. De esta

manera la métrica perturbada está dada por

$$g_{\mu\nu} \approx {}^{(0)}g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ y del mismo orden que el consciente λ/L , donde L es una longitud característica del espacio-tiempo que contiene información sobre su curvatura y λ está asociada con la longitud de onda de la perturbación. En otras palabras, estamos suponiendo que L es mucho mayor que la longitud de onda λ .

La métrica inversa y las componentes mixtas de la métrica son respectivamente:

$$g^{\mu\nu} = {}^{(0)}g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad g_{\nu}^{\mu} = {}^{(0)}g_{\nu}^{\mu} - h_{\nu}^{\mu}. \quad (3.26)$$

El tensor de Riemann de la métrica ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$ es $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ y las correcciones a primer orden de $h_{\mu\nu}$ son

$${}^{(1)}R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} [h_{\alpha\nu;\beta\mu} + h_{\beta\mu;\alpha\nu} - h_{\alpha\mu;\beta\nu} - h_{\beta\nu;\alpha\mu}]. \quad (3.27)$$

Se define el tensor $\Psi_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - {}^{(0)}g_{\mu\nu}$ dando lugar a la siguiente elección de norma

$$\Psi^{\nu\mu}{}_{;\nu} = 0 = \Psi, \quad (3.28)$$

donde $\Psi = \Psi_{\mu}^{\mu}$. Esta norma es llamada norma de Lorentz transversa y sin traza (Landau & Lifshitz, 1975). El tensor de Riemann en términos de Ψ toma la siguiente forma

$${}^{(1)}R_{\alpha\beta\mu\nu} \approx \frac{1}{2} [\Psi_{\alpha\nu;\beta\mu} + \Psi_{\beta\mu;\alpha\nu} - \Psi_{\alpha\mu;\beta\nu} - \Psi_{\beta\nu;\alpha\mu}]. \quad (3.29)$$

El tensor de Ricci $R_{\beta\nu}$, se obtiene utilizando las expresiones (3.25), (3.26) y (3.29) y está dado por

$$R_{\beta\nu} \approx {}^{(0)}R_{\beta\nu} + \Psi_{\beta\nu;\alpha}{}^{\alpha} - {}^{(0)}R_{\alpha\beta\mu\nu} h^{\alpha\mu}. \quad (3.30)$$

De la misma forma, utilizando las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.30) se obtiene el escalar de Ricci a primer orden de $\Psi_{\beta\nu}$, quedando

$$R \approx {}^{(0)}R + {}^{(0)}R_{\mu\alpha} \Psi^{\mu\alpha}, \quad (3.31)$$

Para obtener la ecuación (3.31) se utilizó el hecho de que ${}^{(1)}R = 0$ debido a la elección de norma.

Usando la métrica (3.25) y las ecuaciones (3.30)-(3.31) en las ecuaciones de campo (3.20)

cuando la función $f(R) = R^n$, se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 {}^{(0)}G_{\beta\nu} + {}^{(1)}G_{\beta\nu} - {}^{(0)}R_{\alpha\beta\mu\nu}\Psi^{\alpha\mu} - {}^{(0)}R\Psi_{\beta\nu} \approx & -\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)({}^{(0)}g_{\beta\nu} {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha} + \\
 & + {}^{(0)}g_{\beta\nu} {}^{(0)}R) + (n-1)R^{-1}[{}^{(0)}R + {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\beta\nu} \\
 & + (n-1)(n-2)R^{-2}[{}^{(0)}R + {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\beta} \\
 & [{}^{(0)}R + {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\nu},
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

donde ${}^{(i)}G_{\beta\nu} = {}^{(i)}R_{\beta\nu} - (1/2){}^{(i)}g_{\beta\nu} {}^{(i)}R$. El segundo término del lado derecho de la ecuación (3.32) tiene que ser calculado aún a primer orden de $\Psi_{\beta\nu}$. El inverso de R a primer orden es

$$R^{-1} \approx ({}^{(0)}R + {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha})^{-1} \approx ({}^{(0)}R)^{-1}[1 - {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha} ({}^{(0)}R)^{-1}]. \tag{3.33}$$

El segundo término de la ecuación (3.32) está dado por

$$\begin{aligned}
 R^{-1}[{}^{(0)}R + {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\beta\nu} \approx & ({}^{(0)}R)^{-1}[{}^{(0)}R]_{;\beta\nu} + ({}^{(0)}R)^{-1}[{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\beta\nu} \\
 & - ({}^{(0)}R)^{-2}[{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}][{}^{(0)}R]_{;\beta\nu}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

De la misma forma se calcula R^{-2} a primer orden de la perturbación, obteniendo que

$$R^{-2} \approx ({}^{(0)}R + {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha})^{-2} \approx ({}^{(0)}R)^{-2}[1 - 2{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha} ({}^{(0)}R)^{-1}]. \tag{3.35}$$

El tercer término del lado derecho de la ecuación (3.32), toma la forma

$$\begin{aligned}
 R^{-2}[{}^{(0)}R + {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\beta}[{}^{(0)}R + {}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\nu} \approx & ({}^{(0)}R)^{-2}[{}^{(0)}R]_{;\beta}[{}^{(0)}R]_{;\nu} + \\
 & + ({}^{(0)}R)^{-2}[{}^{(0)}R]_{;\nu}[{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\beta} + ({}^{(0)}R)^{-2}[{}^{(0)}R]_{;\beta}[{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\nu} - \\
 & - 2({}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha})({}^{(0)}R)^{-3}[{}^{(0)}R]_{;\beta}[{}^{(0)}R]_{;\nu}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.34) y (3.36) en las ecuaciones (3.32) y usando el hecho

de que ${}^{(0)}g_{\beta\nu}$ es solución de las ecuaciones de campo se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Psi_{\beta\nu;\alpha}{}^\alpha - {}^{(0)}R_{\alpha\beta\mu\nu}\Psi^{\alpha\mu} - {}^{(0)}R\Psi_{\beta\nu} &\approx -C_1({}^{(0)}g_{\beta\nu}{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}) + \\ &+ C_2\left\{({}^{(0)}R)^{-1}[{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\beta\nu} - ({}^{(0)}R)^{-2}[{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}][{}^{(0)}R]_{;\beta\nu}\right\} + \\ &- C_3\left\{({}^{(0)}R)^{-2}[{}^{(0)}R]_{;\nu}[{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\beta} + ({}^{(0)}R)^{-2}[{}^{(0)}R]_{;\beta}[{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\nu} - \right. \\ &\left. - 2({}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha})({}^{(0)}R)^{-3}[{}^{(0)}R]_{;\beta}[{}^{(0)}R]_{;\nu}\right\}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde $C_1 = (1/6)(n+1)/(n)$, $C_2 = n-1$ y $C_3 = (n-1)(n-2)$. Los términos donde aparece el escalar de Ricci, el tensor de Ricci y el tensor de Riemann que están asociados con $\Psi_{\beta\nu}$ y sus primeras derivadas son despreciables en comparación al primer término de la ecuación (3.37). Esto se debe a que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ es del orden de λ/L . Para mostrarlo de una forma más clara, propongamos la siguiente solución

$$\Psi_{\beta\nu} = \text{Re}(A_{\beta\nu}e^{i\phi}), \quad (3.38)$$

donde ϕ es la función eikonal (cf. Apéndice B), considerada grande para que sea válida la suposición de que $\lambda/L \ll 1$. De esta manera el 4-vector de onda k_α es definido como

$$k_\alpha := \phi_{;\alpha}. \quad (3.39)$$

Por otra parte, usando la ecuación (3.38) en el término $\Psi_{\beta\nu;\alpha}{}^\alpha$, se obtiene que

$$\Psi_{\beta\nu;\alpha}{}^\alpha = [A_{\beta\nu;\alpha}{}^\alpha + 2iA_{\beta\nu;\alpha}\phi^\alpha + iA_{\beta\nu}\phi_{;\alpha}{}^\alpha - A_{\beta\nu}\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha}]e^{i\phi}. \quad (3.40)$$

De aquí se sigue que el último término del lado derecho es el dominante, como resultado de que la función eikonal ϕ es grande. De la misma forma, los demás términos del lado derecho de la ecuación (3.37) son de primer orden en ϕ , a excepción de $({}^{(0)}R)^{-1}[{}^{(0)}R_{\mu\alpha}\Psi^{\mu\alpha}]_{;\beta\nu}$ que tiene un término de orden cuadrático en ϕ . De esta manera se obtiene la expresión

$$-\frac{1}{2}A_{\beta\nu}\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha} + C_1({}^{(0)}R)^{-1}{}^{(0)}R_{\mu\alpha}A^{\mu\alpha}\phi_{;\beta}\phi_{;\nu}]e^{i\phi} = 0. \quad (3.41)$$

Multiplicando esta expresión por el escalar de Ricci no nulo y usando el hecho de que

§3.4. POSIBLE PROBLEMA GENÉRICO PARA TEORÍAS MÉTRICAS 9

$R = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu}$, la expresión (3.37) está dada por

$${}^{(0)}g^{\alpha\mu} {}^{(0)}R_{\mu\alpha} \left[-\frac{1}{2} A_{\beta\nu} \phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha} \right] + C_1 {}^{(0)}R_{\mu\alpha} A^{\mu\alpha} \phi_{;\beta} \phi_{;\nu} = 0. \quad (3.42)$$

Como el escalar de Ricci es distinto de cero, entonces

$${}^{(0)}g^{\alpha\mu} \left[-\frac{1}{2} A_{\beta\nu} \phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha} \right] + C_1 A^{\mu\alpha} \phi_{;\beta} \phi_{;\nu} = 0. \quad (3.43)$$

El segundo término desaparece si se contraen los índices α y μ y se usa la elección de la norma (3.13). De aquí se sigue que

$$k_\alpha k^\alpha = 0, \quad (3.44)$$

donde k_α es el 4-vector de onda definido en la ecuación (3.39). Esta expresión muestra que el vector de onda es nulo y por lo tanto la onda se propaga a la velocidad de la luz c .

§3.4. Posible problema genérico para teorías métricas

En el capítulo anterior se consideró a RAQUAL como una propuesta relativista de MOND, en donde la modificación en la acción consistía en acoplar un campo escalar a la acción de Einstein- Hilbert. Sin embargo, esta propuesta fue desechada por el hecho de que las ondas generadas por el campo escalar eran superlumínicas y no había una modificación en la deflexión de la luz ante un campo gravitacional. En esta misma dirección, se han estudiado otras propuestas de modificación (Sanders, 1997; Soussa & Woodard, 2003; Bekenstein, 1988) que si bien reproducen MOND, no pueden reproducir la fenomenologías de lentes gravitacionales.

Con esta motivación, existen argumentos para sospechar que una teoría métrica de gravitación no puede explicar MOND y lentes gravitacionales, a menos que se violen ciertas propiedades de estas mismas. El argumento comienza de la siguiente manera (Soussa & Woodard, 2004):

1. Una teoría métrica de gravitación tiene diez ecuaciones de campo en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones de la siguiente forma

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}[g] = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (3.45)$$

donde $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ es una función de la métrica, que en relatividad general sería simple-

mente el tensor de Einstein. Este tensor es obtenido por la variación de la acción gravitacional con respecto a la métrica g . El tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ es definido como en la ecuación (1.28).

2. El tensor $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ es un tensor covariante por construcción y por lo tanto se conserva covariantemente, es decir $\nabla^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0$.
3. Puesto que las desviaciones de MOND y Newton llegan a ser significantes en el campo débil, entonces nos restringiremos a estudiar $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ en la aproximación del campo débil. Por la libertad en la elección de las coordenadas nosotros podemos pararnos en un sistema donde la métrica esté de acuerdo con la métrica de Minkowski η en un punto. De aquí se sigue que la métrica está dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.46)$$

donde $h_{\mu\nu}$ es una perturbación pequeña.

4. La modificación de MOND en la aceleración es proporcional a la raíz cuadrada de GM como en la ecuación (2.1).
5. En el límite fuerte de MOND, al menos una componente de $h_{\mu\nu}$ debe ser de la forma \sqrt{GM} para que las curvas de rotación puedan ser reproducidas.
6. El lado derecho de la ecuación (3.45) es de la forma GM .
7. De lo anterior, se puede inferir que al menos una de las diez ecuaciones de campo, es diferente de cero a orden h^2 .
8. Pero si asumimos que la gravitación es absolutamente estable, entonces las diez ecuaciones no pueden empezar a segundo orden en la expansión de campo débil. Esto es porque el subconjunto de ecuaciones dinámicas viene de la variación de un lagrangiano. Si la variación fuese cuadrática, entonces el lagrangiano podría ser cúbico y no sería consistente con la estabilidad. Como resultado solo un subconjunto de estas ecuaciones son del orden de h^2 . Sin embargo, este debe ser distinguible en alguna forma covariante. Ahora bien recordemos que cualquier tensor de campo, simétrico de rango dos tiene dos invariantes: su divergencia y su traza. La divergencia de $\mathcal{G}_{\mu\nu}$, i.e. $\nabla^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu}$, es nula por el argumento 2. Por lo tanto, la traza es la única responsable de MOND, es decir,

$$g^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu} = O(h^2). \quad (3.47)$$

9. Sin embargo las correcciones de MOND pueden desaparecer en relatividad general en el límite del campo débil debido a una transformación local conforme de la métrica

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (3.48)$$

De aquí resulta que las ecuaciones de campo linealizadas carecen de traza.

10. Esto resulta inconveniente para la fenomenología de los lentes gravitacionales por que el lagrangiano del electromagnetismo resulta invariante bajo una transformación conforme. De aquí se sigue que las correcciones de MOND no afectan al electromagnetismo y por lo tanto la deflexión de la luz es la misma que en relatividad general.

El argumento anterior indica que las teorías métricas tienen un problema genérico. Sin embargo, en un estudio más detallado del argumento cabe la posibilidad de lograr reproducir la fenomenología de MOND y de lentes gravitacionales en una teoría métrica si se cambian las condiciones de estabilidad de la gravitación (Soussa, 2003).

§3.5. Teoría $R^{3/2}$

En esta sección se resuelve las ecuaciones de campo para $f(R) = R^n$, en el caso de una métrica con simetría esférica estática. Además se obtendrá el límite de campo débil para $n = 3/2$, motivados por una extensión simple de MOND.

La razón para elegir $f(R) = R^{3/2}$ es la siguiente. Como se vió en la sección §1.1 al generalizar la ecuación de Poisson (c.f. (1.1)) hacia relatividad general se pensó a esta primera como una componente de la ecuación tensorial de campo en el límite de campo débil. De hecho, de la componente temporal. En el caso de $f(R) = R^{3/2}$, lo más conveniente sería llegar a AQUAL, puesto que MOND, en sí no es una ecuación de campo.

Como se vió en la sección §1.2, la acción gravitacional debe de expresarse en forma de una integral escalar $\int G\sqrt{-g} d\Omega$, extendida sobre todo el espacio y a todos los valores de la coordenada temporal entre dos valores dados. Para determinar este escalar, se partió del hecho que las ecuaciones del campo gravitacional deben contener derivadas de segundo orden de la métrica puesto que en el límite cuando la velocidad de la luz $c \rightarrow \infty$ convergen a la ecuación de Poisson (1.1). En el caso de generalizar AQUAL, el escalar G se propone como un función $f(R)$ y de manera análoga para determinar la función f , se parte del hecho de que el límite cuando la velocidad de la luz $c \rightarrow \infty$, converja a la ecuación de campo de AQUAL (c.f. (2.6)). De esta manera si en AQUAL, la ecuación

de campo es una ecuación diferencial de segundo orden elevadas a la un medio, uno esperaría que la función f fuera precisamente $R^{3/2}$.

De manera general, si el lagrangiano del campo gravitacional está dado por

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{k} \sqrt{-g} R^n, \quad (3.49)$$

con $k = 16\pi G/c^3$. Para $n = 1$ se obtiene la teoría de gravitación de Einstein. En el límite a campo débil, la corrección a la métrica es

$$ds^2 = (1 + 2\phi/c^2)dt^2 - \delta_{ij}dl^2, \quad (3.50)$$

donde $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. De aquí se sigue que el escalar de Ricci está dado por

$$R \approx -\frac{2}{c^2} \left(\nabla^2 \phi - \frac{(\nabla \phi)^2}{c^2} \right). \quad (3.51)$$

Así pues, en el caso de la teoría de gravitación de Einstein, el lagrangiano toma la siguiente forma

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{k} \left(\nabla^2 \phi - \frac{(\nabla \phi)^2}{c^2} \right). \quad (3.52)$$

Aquí, el primer término no contribuye a la acción. En efecto, esto se debe a que en la acción correspondiente a el lagrangiano (3.52) este término es de frontera de acuerdo con el teorema de Gauss. Como resultado se obtiene el lagrangiano estandar del campo gravitacional. De manera similar para $n = 3/2$, el argumento del lagrangiano (3.52) se elevaría a la $3/2$. Como consecuencia, el primer término del argumento ya no es de frontera. Esto puede provocar posibles problemas, debido a que puede ser un término dominante en la acción.

A pesar que el lagrangiano no es el mismo que AQUAL, aún cabe la posibilidad de explicar la curvas de rotación planas de galaxias espirales.

Para ello, pensemos en una fuente con simetría esférica y estática para resolver las ecuaciones de campo (3.19) fuera de ella, en general para cualquier n . El elemento de línea en estas condiciones se puede escribir como

$$ds^2 = A(r)dt^2 - (A(r))^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (3.53)$$

Usando el hecho de que el escalar de Ricci no depende del tiempo, la componente tem-

poral de las ecuaciones de campo está dada por

$$R_{00} = \left(\frac{2n-1}{6n} \right) g_{00} R. \quad (3.54)$$

Usando la métrica (3.53) en la ecuación (3.54), se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$-\frac{1}{2} \left[r \frac{d^2}{dr^2} A(r) + 2 \frac{d}{dr} A(r) \right] + \left(\frac{2n-1}{6nr} \right) \left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} A(r) + 4r \frac{d}{dr} A(r) - 2 + 2A(r) \right] = 0. \quad (3.55)$$

Para resolver esta ecuación, proponemos una solución de la forma $A(r) = r^b$, en donde b es un número cualquiera. Insertando la solución en la ecuación diferencial, se obtiene una ecuación algebraica de segundo grado. Como resultado se obtienen dos valores de b , de tal forma que

$$A(r) = 1 + \frac{C_1}{r} + C_2 r^{\frac{2(2n-1)}{n+1}}, \quad (3.56)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Para $n = 3/2$ la función $A(r)$ está dada por

$$A(r) = 1 + \frac{C_1}{r} + C_2 r^{8/5}. \quad (3.57)$$

Usando la componente temporal de la métrica en el campo débil (1.3) y usando la ecuación (3.57), se obtiene que

$$\phi = -\frac{\tilde{C}_1}{r} + \tilde{C}_2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{8/5}. \quad (3.58)$$

Usando el hecho de que una partícula de prueba obedece a la ecuación geodésica (cf. Apéndice A), se sigue que en el límite de campo débil $\nabla\phi = -\mathbf{a}$, donde \mathbf{a} es la aceleración. Con esto, la ecuación (3.58) implica que

$$\mathbf{a} = -\frac{\tilde{C}_1}{r^2} \mathbf{r} + \tilde{C}_2 \frac{5}{3} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{3/5} \mathbf{r}. \quad (3.59)$$

El primer término es la aceleración newtoniana. Sin embargo el segundo no corresponde a MOND cuya aceleración es proporcional a $1/r$. De manera alternativa, consideremos que a partir de cierto momento (dependiendo del parámetro r_0), el término dominante de

la aceleración es el segundo. Además si tomamos en cuenta que para una órbita circular $|\mathbf{a}| = v^2/r$, entonces obtenemos la siguiente relación de proporcionalidad

$$v \propto r^{4/5}, \tag{3.60}$$

donde la velocidad depende de la distancia. En otras palabras, no importa a que distancia se encuentre la partícula de prueba del centro de la galaxia, la velocidad de rotación dependerá de ella. Esto provoca que no se aplane la curva de rotación como en la figura 2.1. Naturalmente la relación de Tully-Fisher (c.f. (2.3)) no se satisface. Esto indica que una teoría métrica $f(R) = R^{3/2}$ no es buen candidato para aplanar curvas de rotación.

Capítulo 4

Gravitación $f(R)$

Una vez que se ha hecho una descripción general de las teorías modificadas $f(R)$, la cuestión inmediata es la elección de la función f que sea capaz de reproducir la fenomenología asociada al problema de materia oscura de las galaxias y cúmulos de galaxias así como la de lentes gravitacionales. Esta función f no debe diferir demasiado de la teoría de relatividad general para explicar estos fenómenos. Basándonos en esta condición, tratamos de resolver las ecuaciones de campo $f(R)$ de tal manera que esta modificación no difiera demasiado de la teoría de relatividad general. Posteriormente, como un resultado se obtiene la forma de $f(R)$ al menos en el límite del campo débil y después se aplica a los fenómenos de lentes gravitacionales.

En la primera sección, se resuelven las ecuaciones de campo $f(R)$ que reproducen la fenomenología de galaxias en una métrica tipo Schwarzschild. En la segunda y tercera sección, se obtiene las trayectorias de partículas en orbitas circulares y por ende la velocidad de rotación de una partícula y una modificación al potencial gravitacional newtoniano, de tal manera que se obtengan curvas de rotación planas de galaxias espirales. Por último, en la tercera sección y cuarta sección, se calcula la deflexión de la luz que pasa por una masa M con simetría esférica y la teoría general de lentes gravitacionales.

§4.1. Solución de las ecuaciones de campo $f(R)$

El estudio a nivel galáctico en la teoría general de la relatividad es en base a la métrica de Schwarzschild. Por lo tanto, se espera que la teoría modificada $f(R)$ se base en una métrica de este estilo. Para ello, se supone que el sistema físico tiene simetría esférica y se comporta como un fluido perfecto, como una primera aproximación, puesto que las galaxias espirales evidentemente no tienen esta simetría. Por lo tanto, la métrica

se puede escribir como

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.1)$$

Usando la ecuación (4.1), se concluye que las componentes no nulas del tensor de Ricci están dadas por

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{B'}{4A} \left[\frac{A'}{A} - \frac{4}{r} \right] + \frac{B}{4A} \left[-\frac{B'^2}{B^2} + \frac{2B''}{B} \right], \\ R_{rr} &= \frac{A'}{4A} \left[\frac{4}{r} + \frac{B'}{B} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{B'^2}{B^2} - \frac{2B''}{B} \right], \\ R_{\theta\theta} &= 1 + \frac{rA'}{2A^2} - \frac{1}{A} - \frac{rB'}{2AB}, \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

en donde $[\]' := d/dr$. De la ecuación (4.2) se sigue que el escalar de Ricci es

$$R = -2 - \frac{r^2}{2} \frac{A'}{A^2} \left[\frac{4}{r} + \frac{B'}{B} \right] + \frac{r^2}{A} \left[-\frac{B'^2}{B^2} + \frac{2B''}{B} \right] + \frac{2}{A} \left[1 + \frac{rB'}{B} \right]. \quad (4.3)$$

Usando las ecuaciones (4.2) y (4.3) en las ecuaciones de campo (3.7) y suponiendo que $v = df/dR$ es una función paramétrica $v(r, \alpha)$ donde el parámetro α es mucho menor que uno, se obtiene que (Sobouti, 2006)

$$\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} = -r \frac{v''}{v} + \frac{1}{2} r \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) \frac{v'}{v} + r(\rho + p) \frac{A}{v}, \quad (4.4)$$

$$\frac{B''}{B} - \frac{1}{2} \left(\frac{B'}{B} - \frac{2}{r} \right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} + 2 \frac{v'}{v} \right) - \frac{2}{r^2} + \frac{2A}{r^2} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{B''}{B} - \frac{1}{2} \frac{B'}{B} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{2}{r} \frac{A'}{A} = -(\rho - p) \frac{A}{v} + A \frac{f}{v} - \left(\frac{B'}{B} + \frac{4}{r} \right) \frac{v'}{v}. \quad (4.6)$$

En estas ecuaciones, ρ y p son la densidad de masa y la presión de la materia respectivamente. La ecuación (4.4) es la combinación $R_{tt}/B + R_{rr}/A$. La ecuación (4.5) es la combinación $R_{tt}/B - R_{\theta\theta}/r^2$. Finalmente la igualdad (4.6) es la componente- rr de las ecuaciones de campo. Adicionalmente, la traza de las ecuaciones de campo (3.18) implica que

$$R = 2 \frac{f}{v} - \frac{3}{A} \left[\frac{v''}{v} + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) + \frac{2}{v} \right\} \frac{v'}{v} \right] - \frac{1}{f'} (\rho - 3p), \quad (4.7)$$

En el sistema físico de interés (e.g. galaxias), no intervienen fuertes campos gravitacionales, de tal manera que la solución no debe diferir demasiado de la teoría general de la relatividad. De hecho, si $f(R) = R$ ó $v = 1$, las ecuaciones (4.4)-(4.6) son las ecuaciones obtenidas para la métrica de Schwarzschild en ésta. Por lo tanto, $v(r, \alpha)$ debe cumplir que cuando $\alpha \rightarrow 0$, entonces $v(r, \alpha) \rightarrow 1$. En otras palabras, podemos obtener una solución

a primer orden de α .

A continuación veamos la solución exterior del sistema ($\rho = p = 0$). Si $A'/A + B'/B$ es una expresión diferencial bien comportada, entonces $A'/A + B'/B = h(r)$, cuya solución es $A(r)B(r) = g(r)$. Se propone que $g(r) = (r)^\alpha \approx 1 + \alpha \ln(r)$ para α 's pequeñas por el hecho de que la solución obtenida debe converger a la de Einstein cuando $\alpha \rightarrow 0$. De esta forma, la ecuación (4.4) es

$$\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} = \frac{\alpha}{r}, AB = \left(\frac{r}{s}\right)^\alpha, \quad (4.8)$$

$$v'' - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r} v' + \frac{\alpha}{r^2} v = 0. \quad (4.9)$$

Para resolver la ecuación (4.9) se propone la solución $v \propto r^\beta$, obteniendo la siguiente expresión

$$\beta^2 - \beta(1 + \frac{1}{2}\alpha) + \alpha = 0. \quad (4.10)$$

De aquí se obtienen dos soluciones $\beta = (1/2)(1 - \alpha/2) \pm \sqrt{1 - 3\alpha + \alpha^2}$ que se aproximan a $\beta_1 \approx \alpha$ y $\beta_2 \approx 1 - \alpha/2$ cuando α es pequeña. De las dos soluciones, la única válida es β_1 , ya que satisface el hecho de que cuando $\alpha \rightarrow 0$, $v(r, \alpha) \rightarrow 1$. Como resultado de esto $v \approx r^\alpha$. Usando estos resultados en las ecuaciones (4.5) y (4.6) se obtiene que (Sobouti, 2006)

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{(1-\alpha)} [1 - (\frac{s}{r})^{(1-\alpha/2)} + \lambda (\frac{r}{s})^{2(1-\alpha/2)}], \quad (4.11)$$

$$B = \left(\frac{r}{s}\right)^\alpha \frac{1}{A}, \quad (4.12)$$

donde λ y s son constantes de integración. Si $\alpha = 0$ y $\lambda = 0$, las expresiones (4.11) y (4.12) convergen a los coeficientes de la métrica de Schwarzschild. De aquí resulta que s es el radio de Schwarzschild $2MG/c^2$.

Usando las expresiones (4.11) y (4.12) en las ecuaciones (4.6) y (4.7) se obtiene que

$$f = \frac{3}{(1-\alpha)} [\alpha (\frac{s}{r})^{2(1-\alpha/2)} + (2 + \alpha)\lambda], \quad (4.13)$$

$$R = \frac{3}{(1-\alpha)} (\frac{s}{r})^\alpha [\alpha (\frac{s}{r})^{2(1-\alpha/2)} + (4 - \alpha)\lambda]. \quad (4.14)$$

En estas relaciones es fácil eliminar r y encontrar a R en términos de f , obteniendo

$$R = (3\alpha)^{-\alpha/2} [f + 6\lambda][f - 3(2 + 3\alpha)\lambda]^{\alpha/2}. \quad (4.15)$$

Esta expresión implica que $f(R) \rightarrow R$, cuando $\alpha \rightarrow 0$ y la constante $\lambda = 0$. La ecuación

(4.15) establece que la forma de f está dada por (Sobouti, 2006)

$$f = (3\alpha)^{\alpha/2} R^{(1-\alpha/2)} \approx R \left[1 - \frac{\alpha}{2} \ln R + \frac{\alpha}{2} \ln(3\alpha) \right], \quad (4.16)$$

cuando $\lambda = 0$

§4.2. Movimiento en un campo central

En la dinámica de galaxias espirales, a una primera aproximación, se asume que es posible tratar a una estrella como una partícula de prueba alrededor de un cuerpo central especificando por el radio de Schwarzschild s . Por lo tanto, se utiliza la métrica (4.1). Por otra parte, usando el hecho de que la órbita de esta partícula de prueba se encuentra en un plano se escoge el plano $\theta = \pi/2$. De forma que la ecuación geodésica (apéndice A) para las componentes r , φ y t respectivamente, está dada por

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{A'}{A} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} c^2 \frac{B'}{A} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{r}{A} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (4.17)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{B'}{B} \frac{dr}{d\tau} = 0. \quad (4.19)$$

De la integración directa de las ecuaciones (4.18) y (4.19) se sigue que

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = J, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{B}, \quad (4.20)$$

donde J es una constante.

Usando la ecuación (4.20) en la ecuación (4.17) para una órbita circular (i.e $dr/d\tau = 0$) se sigue que

$$\frac{1}{2} c^2 \frac{B'}{B^2} - r \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (4.21)$$

Ahora bien, la velocidad v que un observador mide es $v = (r/\sqrt{B})(d\varphi/dt)$. De aquí, que usando regla de la cadena y la ecuación (4.20), se obtiene la siguiente expresión

$$v^2 = \frac{1}{2} r c^2 \frac{B'}{B}. \quad (4.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.11) y (4.12) en (4.22) se encuentra que

$$v^2 = c^2 \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{s}{r} \right)^{1-\alpha/2} \right\}^{-1} \left\{ \alpha \left[1 - \left(\frac{s}{r} \right)^{(1-\alpha/2)} \right] + r \left(\frac{s}{r} \right)^{(-\alpha/2)} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right\}, \quad (4.23)$$

En el límite, cuando $\alpha \ll 1$ y $s/r \ll 1$, la relación anterior se aproxima a

$$v^2 \approx \frac{1}{2}\alpha c^2 + \frac{GM}{r} \left[1 + \frac{1}{2}\alpha \left\{ -1 + \ln\left(\frac{rc^2}{2GM}\right) \right\} \right]. \quad (4.24)$$

De aquí que la velocidad se va acercando a una asíntota v_∞ conforme se va alejando de la distribución de masa. De hecho para distancias grandes la velocidad tiende a $(1/2)\alpha c^2$. Por lo tanto, $\alpha = 2v_\infty/c^2$. Por otra parte, de manera intuitiva se puede ver que α debe de depender de la masa M por la relación de Tully–Fisher (2.3). A pesar de que la relación de la velocidad v respecto de la masa no está dada explícitamente, se ha hecho un estudio por Sobouti (2006) con relación al parámetro α de 40 galaxias espirales. Usando $\alpha = 2v_\infty/c^2$ y el valor de $\alpha(M/M_\odot)^{-1/2}$ para cada una de las galaxias, se ajusta que el valor promedio es de $3.05 \times 10^{-12}(M/M_\odot)^{1/2}$ con una dispersión 0.019×10^{-12} , sin tomar en cuenta algunos casos excepcionales de galaxias. El hecho de obtener estos valores, esboza que la relación de la velocidad de rotación es proporcional a $M^{1/4}$.

§4.3. Límite MONDiano

Para esta modificación es posible obtener una versión de MOND de la siguiente manera. El potencial gravitacional ϕ está determinado por la componente temporal de la métrica en el límite del campo débil (c.f. (1.3)). Por otra parte, en este caso, la componente temporal está determinada por la función $B(r)$. En efecto, usando estos hechos y $B(r)$ a primer orden de aproximación en α y s/r , el potencial gravitacional resulta ser

$$\phi(r) = \frac{c^2\alpha}{2} + \frac{c^2\alpha}{2} \ln(r/s) - \frac{MG}{r}. \quad (4.25)$$

Por otra parte, si se define $\alpha = \alpha_0(GM/GM_\odot)^{1/2}$, entonces la aceleración gravitacional g está dada por

$$\begin{aligned} g &= \left| \frac{d\phi}{dr} \right| = (a_0 g_n)^{1/2} + g_n \\ &= g_n \text{ para } a_0 \ll g_n \\ &= (a_0 g_n)^{1/2} \text{ para } a_0 \gg g_n, \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde $a_0 = \alpha_0^2 c^4 / 4GM_\odot$ y g_n es la aceleración gravitacional newtoniana. Esto justo coincide con MOND. Más aún si se toma el valor de a_0 dado por MOND, se puede

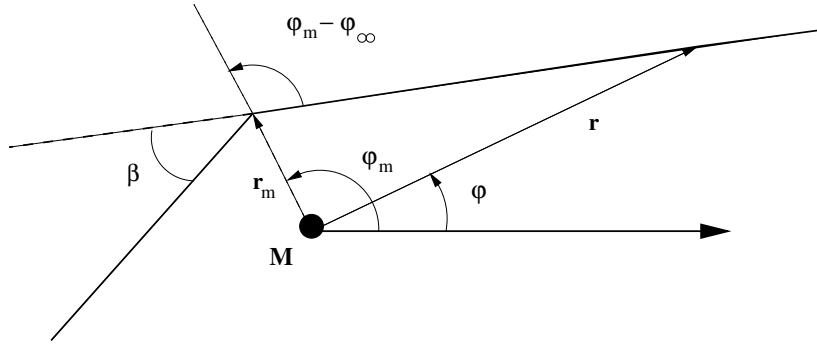


Figura 4.1: Deflexión de la luz pasando cerca de una masa puntual M . El ángulo azimutal φ es el que se forma por el vector posición \mathbf{r} de cualquier punto de la trayectoria con la dirección de la fuente S visto desde la masa puntual M . El vector \mathbf{r}_m es el más cercano a la masa M de la trayectoria de la luz y por consiguiente es donde existe la mayor deflexión. El ángulo β es el ángulo de deflexión.

calcular α , dando como resultado que

$$\alpha = 2.8 \times 10^{-12} (M/M_{\odot})^{1/2}. \quad (4.27)$$

Este valor es cercano al calculado por Sobouti (2006) para 40 galaxias espirales.

Por otra parte, a pesar que se obtiene la relación (4.26) que es muy similar a MOND, existe una pequeña diferencia. En MOND, la constante a_0 es universal. En cambio en esta versión, a_0 depende de α , la cual no es una constante universal por la misma construcción de esta teoría. En otras palabras es posible que α tenga distintos valores para distintos sistemas astrofísicos.

§4.4. Deflexión de la luz para un sistema con simetría esférica

De la solución para una métrica tipo Schwarzschild (4.1) en el contexto de la teoría modificada $f(R)$, se puede calcular también la deflexión de la luz que pasa cerca de un objeto compacto (cf. fig. 4.1). Esta puede ser calculada usando el hecho de que la trayectoria de la luz corresponde a una geodésica nula (i.e. $ds = 0$) y por lo tanto, es solución de la ecuación geodésica (cf. Apéndice A).

Si la trayectoria de la luz puede ser parametrizada por algún parámetro ξ se debe de

satisfacer la siguiente condición

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\xi} \frac{dx^\nu}{d\xi} = 0. \quad (4.28)$$

Esta ecuación resulta del hecho que la luz sigue geodésicas nulas y puede simplificarse si se considera que la trayectoria de la luz está en un plano definido $\theta = \pi/2$ por la dirección de la luz incidente y la posición del sistema. De aquí se sigue que la trayectoria solo dependa de las variables φ y r . Por otra parte, las ecuaciones geodésicas correspondientes a las coordenadas φ y t se pueden integrar una vez por el hecho de que los coeficientes métricos no dependen estas coordenadas, dando lugar a las siguientes ecuaciones

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\xi} = J, \quad (4.29)$$

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{B(r)}, \quad (4.30)$$

donde J es una constante de integración. De las ecuaciones (4.29) y (4.30) se sigue que la ecuación (4.28) está dada por

$$\frac{1}{B(r)} - \frac{J^2}{r^4} A(r) \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - \frac{J^2}{r^2} = 0, \quad (4.31)$$

La constante J puede ser obtenida de la siguiente manera. A lo largo de la trayectoria de la luz, existe un punto (r_m, φ_m) donde la luz está más cerca de la masa M . De hecho en este punto es donde la deflexión de la luz es máxima. Por lo tanto, $dr/d\varphi = 0$. Usando ésto en la ecuación (4.31), se tiene que

$$J = \frac{r_m}{\sqrt{B(r_m)}}. \quad (4.32)$$

Sustituyendo las soluciones de la métrica (4.11) y (4.12), así como la ecuación (4.32) en la igualdad (4.31) se tiene que

$$\int_{\varphi_m}^{\varphi_\infty} d\varphi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{(r/s)^{\alpha/2} dr}{r \sqrt{(r/r_m)^2 B(r_m) - B(r)}}, \quad (4.33)$$

en donde φ_∞ es el valor asintótico de φ a distancias lejanas de la masa M (dirección incidente) hasta φ_m . Sin embargo, este no es el ángulo de deflexión neto que sufre la trayectoria de la luz porque se ha integrado desde el ángulo inicial hasta el punto más cercano de la luz a la masa M . El ángulo de deflexión neto β resulta ser entonces dos

veces esta cantidad menos π , donde π es la dirección de la luz si no hubiera deflexión. Para resolver esta integral se define la variable adimensional $x = r_m/r$. De aquí se sigue que la ecuación (4.33) está dada por

$$\beta = 2 \int_0^1 \frac{(sx/r_m)^{-(\alpha/2)} dx}{\sqrt{B(1) - x^2 B(x)}} - \pi. \quad (4.34)$$

Esta integral no es fácil de resolver. Sin embargo, se puede obtener una solución aproximada si se toma las siguientes consideraciones $r_m \gg s$ y $r \gg s$, las cuales resultan ser válidas para la mayoría de las aplicaciones astrofísicas en lentes gravitacionales. Por lo tanto, podemos obtener una aproximación del ángulo de deflexión tomando en cuenta estas suposiciones. Usando la ecuación (4.12) en la expresión (4.34), se obtiene que

$$\beta = 2\sqrt{1-\alpha} \int_0^1 \frac{x^{-\alpha/2} dx}{\sqrt{(1-x^{2-\alpha}) - (s/r_m)^{1-\alpha/2}(1-x^{3-\alpha/2})}}. \quad (4.35)$$

De aquí resulta que

$$\beta = 2\sqrt{1-\alpha} [I_1 + I_2] - \pi \quad (4.36)$$

donde

$$I_1 := \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha/2} \sqrt{1-x^{2-\alpha}}} \quad \text{y} \quad I_2 := \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r_m} \right)^{1-\alpha/2} \int_0^1 \frac{dx(1-x^{3-3\alpha/2})^{3/2}}{(1-x^{2-\alpha})}. \quad (4.37)$$

Integrando ambas expresiones, el ángulo de deflexión está dado por

$$\beta = \pi \left[\frac{2\sqrt{1-\alpha}}{2-\alpha} - 1 \right] + 2\sqrt{1-\alpha} \left(\frac{s}{r_m} \right)^{1-\alpha/2}. \quad (4.38)$$

Como es de esperarse si $\alpha = 0$, el ángulo de deflexión β resulta ser el ángulo β_E predicho por la teoría general de la relatividad (cf. Apendice C). De esta forma se ha obtenido una modificación del ángulo de deflexión. Una manera de comparar esta modificación respecto de β_E es definiendo la fluctuación $\Delta\beta/\beta_E$ que está dada por

$$\frac{\Delta\beta}{\beta_E} = \frac{\beta - \beta_E}{\beta_E}. \quad (4.39)$$

Esta fluctuación es una función del parámetro α . La gráfica 4.2 muestra que el parámetro s/r_m necesita ser pequeño para obtener una modificación considerable del ángulo de deflexión β para ciertos valores de α . Como es de esperarse, cuando s/r_m se acerca a 1, mayor es el ángulo de deflexión. La expresión obtenida (4.38) para β es sólo válida para

$s/r_m \ll 1$ y por lo tanto, no puede ser usada para valores cercanos a 1. Sin embargo, el rango utilizado en la gráfica 4.2, para s/r_m puede ser relevante para aplicaciones astrofísicas en lentes gravitacionales, si se considera que el valor de α puede diferir del valor obtenido por Sobouti (2006).

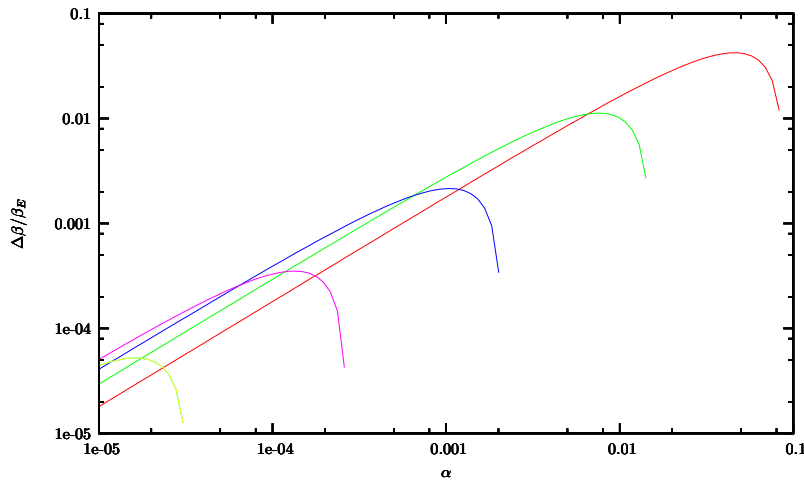


Figura 4.2: Fluctuación del ángulo de deflexión. La gráfica muestra la fluctuación $\Delta\beta/\beta_E$ para el ángulo de deflexión β comparado con el ángulo β_E . Este último es el esperado por la teoría de relatividad general. De izquierda a derecha, cada una de las curvas corresponde a valores diferentes de s/r_m dados por 10^{-6} , 10^{-5} , 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} , respectivamente. Para valores más grandes de s/r_m , se espera que el ángulo de deflexión sea mayor.

§4.5. Teoría de lentes gravitacionales

La deflexión de la luz obtenida para una masa M de la sección anterior, da pauta para estudiar la fenomenología de lentes gravitacionales en donde intervengan campos gravitacionales débiles y la distancia r_m resulte ser mucho menor que la trayectoria de la luz. Teniendo en cuenta estas consideraciones se puede derivar la ecuación de la lente relacionada con la posición de las imágenes observadas y la posición de la fuente en presencia de la lente.

§4.5.1. Ecuación de la lente

El caso más simple de una lente corresponde a un masa puntual M (lente) que esté localizada cerca a la línea de visión y la fuente S , como se muestra en la figura 4.3. El ángulo ϑ describe la posición actual (no-observable) de la fuente respecto del

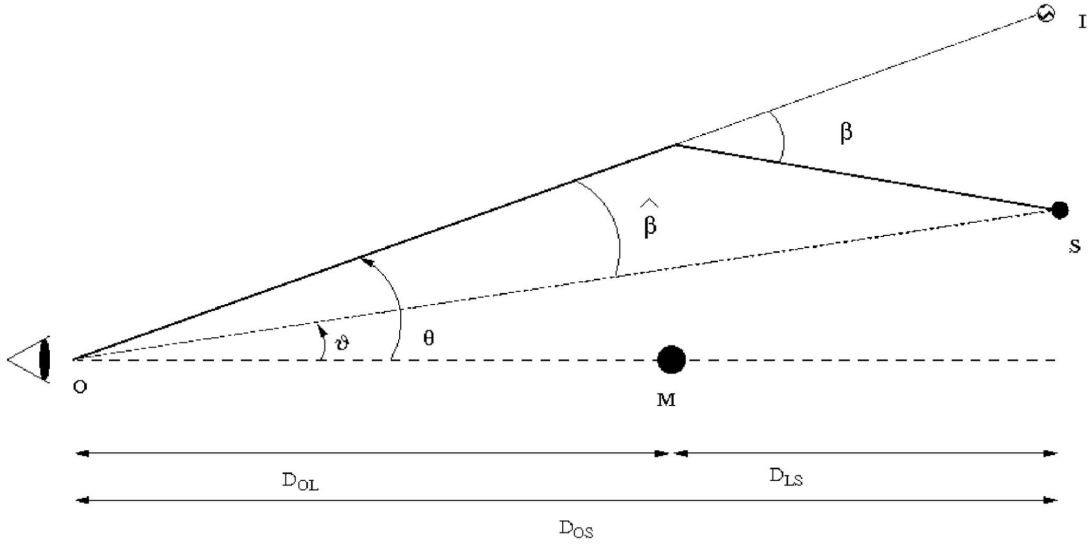


Figura 4.3: Diagrama de la geometría de un lente gravitacional M . El ángulo ϑ resulta ser el que define la posición de la fuente S respecto de la línea de visión. El ángulo θ define la posición de la imagen I obtenida de la fuente S . El ángulo β es el ángulo de deflexión del haz de luz. D_{OL} , D_{LS} y D_{OS} son las distancias euclidianas del observador O a M , de M a S y de O a S respectivamente.

eje óptico que se escoge por conveniencia en la dirección de la lente M respecto del observador O . Por otra parte, θ es el ángulo de la posición aparente (observable) de la imagen I de la fuente S . De la geometría de la figura es claro que

$$\theta D_{OS} = \vartheta D_{OS} + \beta D_{LS}. \quad (4.40)$$

Se define el ángulo de deflexión reducido $\hat{\beta}$ como

$$\hat{\beta} := \beta \frac{D_{LS}}{D_{OS}}. \quad (4.41)$$

De aquí se sigue que la ecuación (4.40) puede ser escrita como

$$\vartheta = \theta - \hat{\beta}. \quad (4.42)$$

Esta expresión corresponde a la ecuación de la lente que describe la relación entre la posición real y la posición aparente de la fuente.

Usando la ecuación (4.38) y que la distancia mínima de un rayo de luz a la lente es

$r_m = \theta D_{OL}$, se sigue entonces que el ángulo reducido de deflexión resulta ser

$$\hat{\beta} = \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \left\{ \pi \left[\frac{2\sqrt{1-\alpha}}{2-\alpha} - 1 \right] + 2\sqrt{1-\alpha} \left(\frac{s}{r_m} \right)^{1-\alpha/2} \right\}. \quad (4.43)$$

En este caso la ecuación de la lente toma la forma

$$\Theta^2 - \Theta [\Phi + C_1] - C_2 \Theta^{\alpha/2} = 0. \quad (4.44)$$

donde

$$C_1 := \frac{\pi}{\theta_E} \frac{D_{SL}}{D_{OS}} \left[\frac{2\sqrt{1-\alpha}}{2-\alpha} - 1 \right], \quad C_2 := \theta_E^{-\alpha/2} \left(\frac{1}{2} \frac{D_{OS}}{D_{LS}} \right)^{-\alpha/2},$$

y

$$\theta_E := \sqrt{\frac{4GM D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}}}, \quad \Theta := \frac{\theta}{\theta_E}, \quad \Phi := \frac{\vartheta}{\theta_E}. \quad (4.45)$$

El ángulo θ_E es el ángulo de Einstein y es solución de la ecuación de la lente de relatividad general cuando la fuente S está alineada con la lente M y el observador O , i.e. $\vartheta = 0$. Las variables Θ y Φ son “los ángulos escalados” respecto del ángulo de θ_E . En el caso donde $\alpha = 0$, la ecuación (4.44) se reduce a la ecuación de la lente en la teoría de relatividad general (cf. Apéndice C).

Para resolver la ecuación (4.44) se toma en cuenta que α es un parámetro pequeño. Por lo tanto, se utiliza un metodo perturbativo de la siguiente manera. Se propone una solución dada por

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1, \quad (4.46)$$

donde Θ_1 es una cantidad a primer orden y el ángulo Θ_0 es solución de la ecuación (4.44) cuando $\alpha = 0$, es decir, es la solución esperada en la teoría de relatividad general. Introduciendo esta solución en la ecuación (4.44) y despreciando términos de segundo orden en Θ_1 , se obtiene que

$$1 + 2\Theta_0\Theta_1 - C_1\Theta_0 - \Theta_1[\Phi + C_1] - C_2\Theta_0^{\alpha/2} \left(1 + \frac{\Theta_1}{\Theta_0} \right)^{\alpha/2} = 0. \quad (4.47)$$

El último término de lado derecho de la ecuación (4.47) se expande en su serie de Taylor y despreciando términos de orden mayor a $O(\Theta_1/\Theta_0)$, el ángulo Θ_1 está dada por

$$\Theta_1 = \frac{C_1\Theta_0 + C_2\Theta_0^{\alpha/2} - 1}{2\Theta_0 - \Phi - C_1 - (\alpha/2)C_2\Theta_0^{\alpha/2-1}}. \quad (4.48)$$

§4.5.2. Amplificación de Imágenes

La deflexión de la luz puede producir un cambio en la aparente luminosidad de la fuente S , como una consecuencia de la distorsión del ángulo sólido bajo el cual un objeto es visto. Esto se debe a que la luminosidad superficial intrínseca no es afectada por la lente. Para mostrar ésto, se utiliza que la luminosidad superficial $I(\nu)$, que es definida como el flujo de energía E de una cierta frecuencia ν , por unidad del área A perpendicular a la dirección de propagación, por unidad de tiempo t , por unidad de ángulo sólido Ω y por unidad de un rango de frecuencias, es decir,

$$I(\nu) = \frac{dE}{dt dA d\Omega d\nu}. \quad (4.49)$$

Por otra parte la radiación emitida por una fuente vista como un flujo de fotones caracterizados por una densidad de espacio fase $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ da el número de fotones en un volumen de espacio fase dado, i.e.,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{dN}{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p}}. \quad (4.50)$$

El hecho de que la diferencial de energía $dE = E_\gamma dN$, donde la energía de un fotón es $E_\gamma = h\nu = cp$ y p es el momento del fotón el cual satisface $d^3\mathbf{p} = p^2 dp d\Omega$ y $d^3\mathbf{x} = cdA dt$, implica que la densidad del espacio está dada por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{dE}{h c p^3 dt dA d\Omega d\nu} = \frac{I(\nu)}{h c p^3}. \quad (4.51)$$

Como resultado de aplicar el teorema de Liouville a un haz de fotones, la densidad f es conservada durante la propagación del haz, sin que haya absorción o emisión de fotones a lo largo de la trayectoria. De aquí se sigue que $I(\nu)/p^3$ tiene que ser constante. Por lo tanto no es afectada por la deflexión gravitacional de la luz.

El flujo recibido de una fuente es precisamente el producto de su luminosidad superficial por el ángulo sólido que lo subtiende. La luminosidad superficial es conservada a lo largo de la trayectoria. Sin embargo, el ángulo sólido subtendido de una fuente dada en el cielo, cambia por la deflexión del flujo recibido dado como resultado que la luminosidad del origen sea amplificada por la lente de la siguiente forma:

$$A := \frac{d\Omega}{d\Omega_0}, \quad (4.52)$$

donde $d\Omega$ es el ángulo sólido observado y $d\Omega_0$ es el ángulo sólido en ausencia de la lente.

Para una lente puntual, un elemento dS de la fuente que subtende un ángulo sólido está dado por $d\Omega_0 = dS/D_{OS}^2 = \vartheta d\phi d\vartheta$. Éste es observado en la posición de la imagen subtendida por el ángulo sólido $d\Omega = dS/D_{OL}^2 = \theta d\phi d\theta$. Por lo tanto la amplificación de cada una de las imágenes puede ser escrita como

$$A_i = \frac{\theta_i d\theta_i}{\vartheta d\vartheta}. \quad (4.53)$$

Usando las variables adimensionales Θ y Φ , la amplificación resulta ser entonces

$$A = \frac{\Theta d\Theta}{\Phi d\Phi} \quad (4.54)$$

Sustituyendo la ecuación (4.46) en la amplificación de una de las imágenes, entonces resulta que

$$A = \frac{\Theta_0 d\Theta_0}{\Phi d\Phi} + \frac{\Theta_1 d\Theta_0}{\Phi d\Phi}. \quad (4.55)$$

El primer término es igual a la amplificación esperada en la teoría general de la relatividad (c.f. Apéndice C). El segundo término está determinado por la ecuación (4.46).

§4.5.3. Dilación del tiempo de llegada

La trayectoria de un haz de luz que es deflectada por una lente, experimenta una dilación en el tiempo respecto de la trayectoria de un haz de la luz en ausencia de la misma. Para obtener una expresión simple de esta dilación, se toma en cuenta que el campo gravitacional de la lente es débil (c.f. (3.50)) y el hecho de que $ds^2 = 0$, obteniendo así

$$dt = \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right) dl, \quad (4.56)$$

donde dl es la longitud euclidea de la trayectoria de la fuente S a la lente M y de la lente M al observador O. Calculando el tiempo propio τ donde $d\tau^2 = (g_{00}/c)dt^2$. Supongamos ahora, que la luz fue emitida de la fuente S en el tiempo propio $\tau = 0$. De esta manera, la trayectoria es recta hasta llegar a la lente M, que es justo el momento cuando se deflecta. Posteriormente continua con una trayectoria recta hasta el observador O. De esta manera, se obtiene la siguiente expresión para el tiempo τ

$$\tau = \frac{1}{c} \int dl - \frac{1}{c^3} \int \phi dl = \frac{l}{c} - \frac{1}{c^3} \int \phi dl. \quad (4.57)$$

La longitud l se obtiene de manera geométrica de la figura 4.3, dando como resultado que

$$l = \sqrt{(\theta D_{OL} - \vartheta D_{OS})^2 + D_{LS}^2} + D_{OL} \sqrt{1 + \theta^2} \approx D_{OS} + \frac{1}{2D_{LS}} (\theta D_{OL} - \vartheta D_{OS})^2 + D_{OL} \frac{\theta^2}{2}. \quad (4.58)$$

El segundo término de la expresión (4.57) se obtiene utilizando el potencial gravitacional ϕ dado por la ecuación (4.25). De aquí resulta que

$$-\frac{1}{c^3} \int \phi dl = \frac{\alpha}{c} \int dl - \left[\frac{MG}{c^3} \int \frac{dl}{l} + \frac{\alpha}{c} \int \ln(s/l) dl \right]. \quad (4.59)$$

Integrando este término desde la fuente a la lente y de la lente hasta el observador, se obtiene que

$$-\frac{1}{c^3} \int \phi dl = \frac{\alpha}{2c} l - \frac{MG}{c^3} \ln l - \frac{\alpha}{2c} [l \ln(l) + l]. \quad (4.60)$$

Usando la ecuación (4.58) y despreciando los términos de ϑ , se tiene que el tiempo propio τ es tal que

$$\tau = \frac{1}{c} \left(D_{OS} + \frac{1}{2D_{LS}} (\theta D_{OL} - \vartheta D_{OS})^2 + D_{OL} \frac{\theta^2}{2} \right) - \frac{2MG}{c^3} \ln(\theta/\theta_E) + \alpha c \theta^2 \ln(\theta/\theta_E). \quad (4.61)$$

Por otra parte, el tiempo propio τ_{eu} de un haz de luz que no es deflectado por la lente y llega hasta el observador está dado por

$$\tau_{eu} \approx \frac{D_{OS}}{c} \left[1 + \frac{\varphi^2}{2} \right]. \quad (4.62)$$

De aquí se sigue que la dilación del tiempo de llegada $\Delta\tau = \tau - \tau_{eu}$ está dado por

$$\Delta\tau = \frac{D_{OS} D_{OL}}{c D_{LS}} \left[\frac{(\theta - \vartheta)^2}{2} - \frac{\theta_E^2}{2} \ln(\theta/\theta_E) + \alpha c \theta^2 \ln(\theta/\theta_E) \right]. \quad (4.63)$$

De acuerdo con esto, si $\alpha = 0$, se obtiene el tiempo de dilación esperado en la teoría de relatividad general. El término extra $\alpha c \theta^2 \ln(\theta/\theta_E)$ resulta ser una contribución para $\Delta\tau$ solo si θ es mayor que θ_E . Para el caso en que $\theta = \theta_E$, esta contribución es nula. Sin embargo, el ángulo de Einstein nunca es solución de la ecuación (4.44), aún si $\vartheta = 0$. En otras palabras el tiempo de dilación obtenido es mayor que el obtenido en la teoría de relatividad general.

§4.6. Análisis del problema genérico de una teoría métrica de gravitación

En la sección §3.4, se vió la imposibilidad de que una teoría métrica reproduzca MOND y a su vez explique la fenomenología de lentes gravitacionales. Sin embargo, en este capítulo hemos mostrado que la teoría métrica de gravitación propuesta por Sobouti (2006) llega a una versión de MOND y existe una deflexión mayor de la luz que la esperada en relatividad general. Entonces la pregunta inmediata que surge es: ¿puede ser posible que el argumento del problema genérico descrito en la sección §3.4 esté equivocado? La respuesta es la siguiente. Como se vió, en la sección §3.4, en el límite fuerte de MOND, al menos una componente de $h_{\mu\nu}$ debe ser de la forma \sqrt{GM} para que las curvas de rotación puedan ser reproducidas. Sin embargo, el lado derecho de las ecuaciones de campo (c.f. ecuación (3.45)) en éste límite van como GM y de aquí se sigue que al menos una de sus componentes va como h^2 . Como consecuencia de esto, la modificación puede ser removida en el electromagnetismo. Por lo tanto, la luz no posee una alteración distinta a la de la relatividad general mediante esta modificación.

Sin embargo, en esta teoría hemos encontrado una modificación de tal forma que la perturbación es de primer orden y por lo tanto existe una modificación en la deflexión de esta misma en presencia de un campo gravitacional. Entonces vemos que el argumento dado por Soussa & Woodard (2004) no es válido al menos en esta teoría y es debido a que no necesariamente algunas de las componentes de la perturbación debe de empezar a orden h^2 . De hecho, si nos concentramos en la componente temporal de las ecuaciones de campo $f(R)$ (c.f. ecuación (3.7)) y la componente temporal de la métrica (1.3) a campo débil se obtiene la siguiente ecuación de campo débil para la función (4.16):

$$\gamma_0 \left[-\frac{4}{3} \frac{\nabla^2 \phi}{c^2} - 2\alpha \left[-\frac{5}{6} + \frac{\ln(3\alpha)}{3} \right] \frac{\nabla^2 \phi}{c^2} + \frac{2\alpha}{3} \frac{\nabla^2 \phi}{c^2} \ln \left(\frac{-2\nabla^2 \phi}{c^2} \right) \right] = \frac{16\pi G\rho}{3c^2}, \quad (4.64)$$

donde γ_0 es una constante de acoplamiento adecuada al proponer una acción de la forma $(-c^3\gamma_0/16\pi G) \int f(R)\sqrt{-g}d\Omega$ con $f(R)$ dada por la ecuación (4.16). Nótese que de esta ecuación es fácil ver que el potencial gravitacional ϕ puede ir como \sqrt{GM} para encontrar una modificación parecida a MOND. Sin embargo, en esta teoría se propone que el parámetro α sea de la forma (4.27). De aquí se sigue que la ecuación (4.64) puede ser rescalable por GM , sin la necesidad de ir a orden de h^2 . Por esta razón no es válido el argumento del posible problema de las teorías métricas de gravitación al menos para la teoría de Sobouti (2006).

Conclusiones

En este trabajo se han discutido diversas teorías métricas de gravitación $f(R)$ y se mostró que pueden ser posibles alternativas al paradigma de materia oscura. Esto motivado por diferentes alternativas de modificación a la gravitación newtoniana como son MOND (Modified Newtonian Dynamics), AQUAL (Aquadratic Lagrangian) y también sus contrapartes relativistas como son RAQUAL y TeVeS.

Las teorías métricas de gravitación $f(R)$ por el simple hecho de que son una modificación a la acción del campo gravitacional, respetan varios principios físicos y aseguran la conservación de la energía y el momento. Adicionalmente se mostró que todas las teorías métricas de gravitación de la forma $f(R) = R^n$ producen ondas gravitacionales propagándose a la velocidad de la luz c . Por lo tanto, resultan ser teorías consistentes.

Por medio de argumentos muy parecidos a los de Einstein para generalizar la ecuación de Poisson, se trató de generalizar la ecuación de campo para AQUAL, dando como resultado analizar la teoría $f(R) = R^{3/2}$. Resolver las ecuaciones de campo de esta misma para una métrica tipo Schwarzschild y se obtuvo una modificación la cual no explica las curvas de rotación de las galaxias espirales.

Por otra parte, se ha reproducido la teoría métrica de gravitación desarrollada por Sobouti (2006) que es una teoría $f(R)$ la cual explica las curvas de rotación. El paso fundamental de esta teoría es pedir que la función f no difiera demasiado de relatividad general a primera aproximación, el cual es tal que se introduce un parámetro α , de tal manera que cuando $\alpha = 0$ se recupera relatividad general. Además esta teoría llega a una versión de MOND en el límite de campo débil.

También, hemos probado que la teoría de Sobouti produce un deflexión de la luz mayor que la esperada en relatividad general bajo ciertos valores de los parámetros r_m/s y α . Estos valores pueden ser relevantes para ciertos sistemas astrofísicos, tales como los cúmulos de galaxias y las galaxias mismas. Sin embargo, aún es necesaria mayor investigación en esta teoría para poder comparar estos resultados directamente con las observaciones. En esta parte, es necesario estudiar los diferentes valores del parámetro α para distintos sistemas astrofísicos. Particularmente, la teoría de lentes gravitacionales necesita ser desarrollada en su totalidad. Sin embargo, el hecho de que reproduzca las curvas de rotación de galaxias espirales y prediga una deflexión de la luz mayor que la esperada por relatividad general resulta ser crucial para una buena propuesta alternativa al paradigma de materia oscura. De ninguna forma la teoría métrica de gravitación desarrollada por Sobouti (2006) puede ser tomada como una teoría fundamental, sino como una aproximación en una determinada escala física.

Por último se analizó el posible problema genérico de una teoría métrica de gravitación. Y se mostró que este argumento no es válido al menos en la teoría de Sobouti.

En conclusión, esta teoría es relevante debido a que puede explicar los fenómenos astrofísicos de manera alternativa al paradigma de materia oscura para ser explicados al menos a nivel galáctico. Sin embargo, es necesario desarrollar la teoría en distintos sistemas astrofísicos. Cabe mencionar además, que también existe una teoría métrica $f(R)$ desarrollada por Capozziello et al. (2006) que puede reproducir las curvas de rotación producidas por diferentes galaxias espirales para una $f(R) = R^n$, con $1.34 \lesssim n \lesssim 2.41$. Sin embargo, esta no reproduce de manera natural la relación de Tully-Fisher y no converge a MOND.

Apéndice A

Ecuación geodésica

El movimiento de una partícula libre es determinado por el principio de mínima acción, en el cual se exige a la acción S ser un extremal, i.e.

$$\delta S = -\eta \delta \int ds = 0, \quad (\text{A.1})$$

en donde η es una constante que caracteriza a la partícula y $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ es el intervalo (c.f. Landau & Lifshitz (1975)). Esto corresponde a exigir que las partículas se muevan sobre una trayectoria extrema del espacio-tiempo entre dos puntos¹. Esta trayectoria mínima es conocida como geodésica. En el caso de un fotón, $ds = 0$ lo que implica que se mueven a lo largo de trayectorias nulas².

Para obtener la ecuación de movimiento, se parametriza la trayectoria $x^\mu(\lambda)$ por un parámetro λ y se encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange que están dadas por

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \left[\frac{ds}{d\lambda} \right] = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{ds}{d\lambda} \right], \quad (\text{A.2})$$

¹En rigor, el principio de mínima acción afirma que la integral debe ser mínimo tan solo para longitudes infinitesimales del camino de integración. Para caminos de longitud cualquiera sólo podemos afirmar que S debe de poseer un extremo, no necesariamente un mínimo. Entonces la constante ν debe ser positiva ya que la integral $\int_a^b ds$ toma un valor máximo. De aquí que aparece el signo negativo en la acción (c.f. Landau & Lifshitz (1975)).

²Se puede mostrar que $ds = 0$ en el límite cuando la longitud de onda $\lambda \ll 1$, usando la aproximación eikonal como se muestra en el apéndice B. De manera similar, también es posible mostrar que cuando $\lambda \ll 1$ y que la luz obedece a la ecuación de onda se obtiene que el vector de onda \mathbf{k} es un vector nulo y por lo tanto la luz se mueve a lo largo de trayectorias nulas (c.f. Landau & Lifshitz (1975)).

donde $\dot{x}^\mu := dx^\mu/d\lambda$. La expresión anterior es equivalente a

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \left[\frac{ds}{d\lambda} \right]^2 - 2 \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{ds}{d\lambda} \right] \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \left[\frac{ds}{d\lambda} \right] = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{ds}{d\lambda} \right]^2. \quad (\text{A.3})$$

Para simplificar esta ecuación, el parámetro λ es tal que $ds/d\lambda$ es una constante a lo largo de la trayectoria³. De aquí resulta que la ecuación (A.3) se reducen entonces a:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g_{\beta\nu} \dot{x}^\beta \dot{x}^\nu) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g_{\beta\nu} \dot{x}^\beta \dot{x}^\nu). \quad (\text{A.4})$$

De aquí se sigue que

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\beta\nu} \right] \dot{x}^\beta \dot{x}^\nu. \quad (\text{A.5})$$

Expandiendo el lado izquierdo de la ecuación, contrayendo por $g^{\alpha\mu}/2$ y usando la relación de la conexión con la métrica (c.f. (3.5)) se obtiene que

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Esta ecuación describe el movimiento de una partícula para coordenadas arbitrarias en un espacio tiempo curvo.

Para una partícula masiva, la constancia requerida de $ds/d\lambda$ a lo largo de la trayectoria está garantizada si hacemos la elección apropiada de $\lambda = s^4$. Así debido a que $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ entonces

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1. \quad (\text{A.7})$$

En el caso de un fotón, para el cual $ds^2 = 0$, se obtiene que

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (\text{A.8})$$

En este caso, la relación debe ser considerada como una constricción y el parámetro afín λ queda determinado por la misma ecuación geodésica (A.6).

³En este caso, se dice que λ es un parámetro afín y el intervalo medido a lo largo de la trayectoria tiene una dependencia lineal en λ .

⁴De hecho, si el intervalo es tipo tiempo o nulo siempre se puede hacer $\lambda = \tau$.

Apéndice B

Aproximación eikonal

Una onda plana se caracteriza por la propiedad de que su dirección de propagación y su amplitud son las mismas en todas partes. Una onda electromagnética cualquiera no tiene necesariamente esta propiedad. Sin embargo, a pesar de este hecho, muchas ondas electromagnéticas que no son planas, se pueden considerar como tal en cada región pequeña del espacio tiempo. Para ello es necesario considerar, que la amplitud y la dirección de la onda se conservan practicamente constantes a distancias del orden de la longitud de onda. Si se cumple esta condición, en cada región pequeña del espacio se puede considerar una dirección de la propagación de la onda. De esta manera se introduce el concepto de rayos. Por lo tanto, se considera a la propagación de las ondas electromagnéticas como propagación de rayos, despreciando sus propiedades de onda en el caso límite de ondas pequeñas, i.e. cuando la longitud de onda $\lambda \rightarrow 0$.

Para derivar la ecuación fundamental en este límite, consideremos a f una función que describe al campo de la onda electromagnética. En el caso de una onda plana, la función f tiene la siguiente forma

$$f = \text{Re}[A e^{i(k_\beta x^\beta + \theta)}], \quad (\text{B.1})$$

donde A es la amplitud de la onda, k_β es el 4-vector de onda y θ es la fase. De la misma forma, para una onda electromagnética no necesariamente plana cuya longitud es pequeña, la función f está dada por

$$f = \text{Re}[A e^{i\Psi}]. \quad (\text{B.2})$$

Aquí la amplitud A es una función de las coordenadas del espacio-tiempo y la fase Ψ que es llamada la eikonal, no tiene una forma sencilla como en la onda plana. Sin embargo,

es esencial que la eikonal sea una cantidad grande. Esto se ve inmediatamente al usar el hecho de que cambia en 2π cuando nos movemos una distancia igual a una longitud de onda y que esta misma es tal que $\lambda \rightarrow 0$.

En pequeñas regiones del espacio tiempo, la eikonal puede ser desarrollada en serie. Si nos limitamos a términos de primer orden se obtiene que

$$\Psi = \Psi_0 + x^\mu \partial_\mu \Psi.$$

De aquí se identifica de manera natural

$$k_\mu := \partial_\mu \Psi, \tag{B.3}$$

que corresponde al hecho de que en pequeñas regiones del espacio tiempo la onda puede ser considerada como plana. El 4-vector de onda k_μ satisface la relación $k_\mu k^\mu = 0$. Sustituyendo aquí la ecuación (B.3) se obtiene que

$$\partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi = 0, \tag{B.4}$$

Esta ecuación se denomina la ecuación eikonal, la cual, también puede ser derivada directamente de la ecuación de onda. En efecto, supongamos que f es solución de la ecuación de onda, i.e.

$$f_{;\beta}{}^\beta = 0, \tag{B.5}$$

entonces usando la ecuación (B.2) se obtiene que

$$A_{;\mu}{}^{i\mu} + 2iA_{;\mu} \Psi^{i\mu} + iA \Psi_{;\mu}{}^\mu - A \Psi_{;\mu} \Psi^{i\mu} = 0. \tag{B.6}$$

Los primero tres términos son pequeños en comparación con el cuarto por el hecho de que Ψ es grande. Dada entonces la arbitrariedad de A se obtiene entonces la ecuación eikonal.

Apéndice C

Deflexión de la luz en relatividad general

En este apéndice se muestra la teoría de lentes gravitacionales en el contexto de relatividad general. Para un estudio más cuidadoso se recomienda las referencias Mollerach & Roulet (2002) y Schneider P. (1999).

En el contexto de la relatividad general, la deflexión de los rayos de luz que pasan cerca de un campo gravitacional producido por una masa M , corresponden a geodésicas nulas. Si consideramos además que esta campo gravitacional contiene una simetría esférica entonces recurrimos a la métrica de Schwarzschild. En este caso, la trayectoria de la luz está contenida en un plano $\theta = \pi/2$ que está definido por la dirección incidente de la luz y la posición de la masa. Por lo tanto la trayectoria es descrita solamente por las coordenadas r y φ . Así, el elemento de línea se reduce a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{c^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2. \quad (\text{C.1})$$

Como consecuencia de que los coeficientes métricos no dependen de φ ni de t , se obtienen las siguientes ecuaciones (c.f. Mollerach & Roulet (2002))

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = J, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2MG}{c^2}\right)^{-1}, \quad (\text{C.3})$$

donde J es una constante de integración. Usando el hecho de que para un fotón $ds = 0$,

se obtiene que

$$\left(1 - \frac{2MG}{c^2}\right) c^2 \left[\frac{dt}{d\lambda}\right]^2 - \left(1 - \frac{2MG}{c^2}\right)^{-1} \left[\frac{dr}{d\lambda}\right]^2 - r^2 \left[\frac{d\varphi}{d\lambda}\right]^2 = 0. \quad (\text{C.4})$$

Usando las ecuaciones (C.2) y (C.3) en la ecuación anterior, se obtiene que

$$d\varphi = \frac{J}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - (J^2/r^2)(1 - (2GM/rc^2))}}. \quad (\text{C.5})$$

En el punto (r_m, φ_m) que es el más cercano a la masa M , la deflexión es máxima, i.e. $(dr/d\varphi) = 0$. Usando este hecho en la ecuación (C.5), resulta que

$$J = \frac{r_m}{\sqrt{1 - (2GM/rc^2)}}. \quad (\text{C.6})$$

Para resolver la ecuación (C.5), definamos la variable adimensional $x := r_m/r$. De aquí se sigue que la ecuación (C.5) está dada por

$$\varphi_m - \varphi_\infty = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - x^2 - (2GM/r_m c^2)(1 - x^3)}}, \quad (\text{C.7})$$

donde φ_∞ es la dirección incidente del rayo. Una solución aproximada de la integral, se obtiene en el límite $r_m \gg 2GM/c^2$:

$$\varphi_m - \varphi_\infty = \frac{\pi}{2} + \frac{2GM}{r_m c^2}. \quad (\text{C.8})$$

El ángulo neto de deflexión β_E es dos veces esta cantidad menos π , donde π corresponde a no deflexión. De esta forma, se obtiene que

$$\beta_E = \frac{4GM}{r_m c^2}. \quad (\text{C.9})$$

La ecuación de la lente calculada en el capítulo 4, es la misma que se obtiene en la relatividad general puesto que ambas son calculadas mediante argumentos geométricos. De esta manera, la ecuación de la lente es (cf. ecuación (4.40))

$$\vartheta = \theta - \hat{\beta}_E, \quad (\text{C.10})$$

donde $\hat{\beta}_{GR} = (D_{LS}/D_{OS})\beta_E$. Usando el hecho de que $r_m = \theta D_{OL}$, el ángulo $\hat{\beta}_E$ resulta

ser

$$\hat{\beta}_E = \frac{\theta_E^2}{\theta}. \quad (\text{C.11})$$

En este caso la ecuación de la lente toma la forma

$$\theta^2 - \theta\vartheta - \theta_E^2 = 0. \quad (\text{C.12})$$

Resolviendo la ecuación de la lente para una posición fija de ϑ , se puede obtener los valores de θ que corresponde a la posición de las imágenes. Un resultado interesante es cuando la lente y el origen están perfectamente alineados, i.e. $\vartheta = 0$. En este caso, debido a la simetría de la lente, la imagen es en realidad un anillo de radio angular θ_E . Este tipo de imágenes simétricas se conocen como anillos de Einstein. En general, sin embargo habrá dos imágenes cuyas posiciones angulares están dadas por

$$\theta_{\pm} = \frac{\vartheta}{2} \pm \theta_E^2 \sqrt{1 - \frac{\vartheta}{4\theta_E^2}}. \quad (\text{C.13})$$

Este resultado nos muestra que existe dos imagenes opuestas a lo largo de la línea de visión en el cielo, determinada por el origen y la lente.

Por otra parte, de la misma forma que en el capítulo 4, la amplificación de las imágenes (c.f. §4.5.2) está dada por,

$$A = \frac{d\Omega}{d\Omega_0}, \quad (\text{C.14})$$

donde $d\Omega$ es el ángulo sólido observado y $d\Omega_0$ es el correspondiente a la ausencia de lente. En términos de ϑ y θ , la amplitud está dado por

$$A_{\pm} = \frac{d\Omega_{\pm}}{d\Omega_0} = \frac{\theta_{\pm} d\theta_{\pm}}{\vartheta_{\pm} d\vartheta_{\pm}}. \quad (\text{C.15})$$

Usando la ecuación (C.13), obtenemos que la amplificación está determinada por

$$A_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\vartheta^2 + 2\theta_E^2}{2\vartheta \sqrt{\vartheta^2 + 4\theta_E^2}}. \quad (\text{C.16})$$

Por otra parte se puede también calcular la dilación del tiempo $\Delta\tau_E$ que resulta del hecho que los rayos de luz son deflectados. Para obtener una expresión simple de esta dilación, se toma en cuenta que el campo gravitacional de la lente es débil (c.f. (3.50)) y

el hecho de que $ds^2 = 0$, obteniendo así

$$dt = \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right) dl, \quad (\text{C.17})$$

donde dl es la longitud euclidiana de la trayectoria de la fuente S a la lente M y de la lente M al observador O. Calculando el tiempo propio τ_E donde $d\tau_E^2 = (g_{00}/c)dt^2$. Supongamos ahora, que la luz fue emitida de la fuente S en el tiempo propio $\tau_E = 0$. De esta manera, a primer orden podemos suponer que la trayectoria es recta hasta llegar a la lente M, que es justo el momento cuando se defleca. Posteriormente continua con una trayectoria recta hasta el observador O. Esta suposición es válida puesto que las distancias D_{OS} , D_{LS} y D_{OL} son lo bastante grandes que en términos prácticos da lo mismo que la deflexión sea en un punto o en varios puntos de la trayectoria de la luz. De esta manera, se obtiene la siguiente expresión para el tiempo τ_E

$$\tau_E = \frac{l}{c} - \frac{1}{c^3} \int \phi dl. \quad (\text{C.18})$$

De la misma forma que en el capítulo 4, la longitud l se obtiene de manera geométrica de la figura 4.3, dando como resultado que (c.f. ec. (4.58))

$$l = \sqrt{(\theta D_{OL} - \vartheta D_{OS})^2 + D_{LS}^2} + D_{OL} \sqrt{1 + \theta^2} \approx D_{OS} + \frac{1}{2D_{LS}} (\theta D_{OL} - \vartheta D_{OS})^2 + D_{OL} \frac{\theta^2}{2}. \quad (\text{C.19})$$

El término donde aparece el potencial gravitacional de la ecuación (C.18) se puede integrar usando la métrica (C.1). De aquí se sigue que el tiempo τ_E está dado por

$$\tau_E = \frac{1}{c} \left(D_{OS} + \frac{1}{2D_{LS}} (\theta D_{OL} - \vartheta D_{OS})^2 + D_{OL} \frac{\theta^2}{2} \right) - \frac{2MG}{c^3} \ln(\theta/\theta_E). \quad (\text{C.20})$$

Por otra parte, el tiempo propio τ_{eu} de un haz de luz que no es deflectado por la lente y llega hasta el observador está dado por

$$\tau_{eu} \approx \frac{D_{OS}}{c} \left[1 + \frac{\vartheta^2}{2} \right]. \quad (\text{C.21})$$

Usando las ecuaciones (C.20) y (C.21), la dilación del tiempo de llegada $\Delta\tau_E = \tau_E - \tau_{eu}$ esta dada por

$$\Delta\tau_E = \frac{D_{OS}D_{OL}}{cD_{LS}} \left[\frac{(\theta - \vartheta)^2}{2} - \frac{\theta_E^2}{2} \ln(\theta/\theta_E) \right]. \quad (\text{C.22})$$

Bibliografía

- ANDERSON, J. D. ET AL., 1998. Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses Data, of an Apparent Anomalous, Weak, Long-Range Acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 2858–2861.
- BARROW, J. D. & OTTEWILL, A. C., 1983. THE STABILITY OF GENERAL RELATIVISTIC COSMOLOGICAL THEORY. *J. Phys.*, **A16**, 2757.
- BEKENSTEIN, J. & MILGROM, M., 1984. Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity? *Astrophys. J.*, **286**, 7–14.
- BEKENSTEIN, J. D., 1988. PHASE COUPLING GRAVITATION: SYMMETRIES AND GAUGE FIELDS. *Phys. Lett.*, **B202**, 497–500.
- BEKENSTEIN, J. D., 1993. The Relation between physical and gravitational geometry. *Phys. Rev.*, **D48**, 3641–3647.
- BEKENSTEIN, J. D., 2004. Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm. *Phys. Rev.*, **D70**, 083509.
- BEKENSTEIN, J. D., 2005. Modified gravity vs dark matter: Relativistic theory for MOND. *PoS*, **JHW2004**, 012.
- BERNAL, A. & MATOS, T., 2005. Non cuspy galactic halos from scalar field dark matter. *AIP Conf. Proc.*, **758**, 161–169.
- BRANS, C. & DICKE, R. H., 1961. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, **124**, 925–935.
- BRANS, C. H., 2005. The roots of scalar-tensor theory: An approximate history.
- CAPOZZIELLO, S., 2002. Curvature quintessence. *Int. J. Mod. Phys.*, **D11**, 483–492.

- CAPOZZIELLO, S., CARDONE, V. F., CARLONI, S. & TROISI, A., 2004. Can higher order curvature theories explain rotation curves of galaxies? *Phys. Lett.*, **A326**, 292–296.
- CAPOZZIELLO, S., CARDONE, V. F. & TROISI, A., 2006. Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of R^{**n} gravity: No need for dark matter?
- CAPOZZIELLO, S., CARLONI, S. & TROISI, A., 2003. Quintessence without scalar fields.
- CARIGNAN, CLAUDE; BEAULIEU, S., 1989. Optical and H I studies of the 'gas-rich' dwarf irregular galaxy DDO 154. *Astrophysical Journal*, **347**, 760–770.
- CARROLL, SEAN M., 1997. Lecture notes on general relativity.
- COOLEY, J., 2006. Status and perspectives of dark matter searches.
- CROFT, R. A. C., HU, W. & DAVE, R., 1999. Cosmological limits on the neutrino mass from the Ly alpha forest. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 1092–1095.
- EINSTEIN, A., 1915. The Field Equations of Gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, **1915**, 844–847.
- EINSTEIN, A. & BERGMANN, P., 1938. ON A GENERALIZATION OF KALUZA'S THEORY OF ELECTRICITY. *Annals Math.*, **39**, 683–701.
- FAMAHEY, B. & BINNEY, J., 2005. Modified Newtonian Dynamics in the Milky Way. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **363**, 603–608.
- FELTEN, J. E. ., 1984. Milgrom's revision of Newton's laws - Dynamical and cosmological consequences. *Astrophysical Journal, Part 1.*, **286**, 3–6.
- FIXSEN, D. J., CHENG, E. S., GALES, J. M., MATHER, J. C., SHAFER, R. A. & WRIGHT, E. L., 1996. The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set. *Astrophys. J.*, **473**, 576–587.
- HILBERT, D., 1915. The foundations of physics. 1. *Gott. Nachr.*, **27**, 395–407.
- KALUZA, T., 1921. ON THE PROBLEM OF UNITY IN PHYSICS. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, **1921**, 966–972.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M., 1975. *The Classical Theory of Fields, Course on theoretical Physics V.2*. Pergamon Press, London, 4th ed.

- MCGAUGH, S., 2005a. Some Systematic Properties of Rotation Curves.
- MCGAUGH, S. S., 2005b. The Baryonic Tully-Fisher Relation of Galaxies with Extended Rotation Curves and the Stellar Mass of Rotating Galaxies. *Astrophys. J.*, **632**, 859–871.
- MCGAUGH, S. S. & DE BLOK, W. J. G., 1998. Testing the Hypothesis of Modified Dynamics with Low Surface Brightness Galaxies and Other Evidence. *Astrophys. J.*, **499**, 66–81.
- MILGROM, M., 1983a. A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophys. J.*, **270**, 365–370.
- MILGROM, M., 1983b. A Modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxies. *Astrophys. J.*, **270**, 371–389.
- MISNER, C. W., THORNE, K. S. & WHEELER, J. A., 1973. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1973.
- MOLLERACH, S. & ROULET, E., 2002. *Gravitational Lensing and Microlensing*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1st ed.
- NAVARRO, I. & VAN ACOLEYEN, K., 2005. Modified gravity, dark energy and MOND.
- SANDERS, R. H., 1997. A stratified framework for scalar-tensor theories of Modified Dynamics. *Astrophys. J.*, **480**, 492–502.
- SANDERS, R. H. & MCGAUGH, S. S., 2002. Modified Newtonian Dynamics as an Alternative to Dark Matter. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **40**, 263–317.
- SCHNEIDER P., E. J., 1999. *Gravitational Lenses*. Astronomy and Astrophysics Library, Springer, 1st ed.
- SHIFF, L., 1960. *Am. Journ. Phys.*, **28**, 340.
- SOBOUTI, Y., 2006. An $f(R)$ gravitation instead of dark matter.
- SOUSSA, M., 2003. A Closer Look at the Mond No-Go Statement for Purely Metric Formulations.
- SOUSSA, M. E. & WOODARD, R. P., 2003. A Nonlocal Metric Formulation of MOND. *Class. Quant. Grav.*, **20**, 2737–2752.

- SOUSSA, M. E. & WOODARD, R. P., 2004. A generic problem with purely metric formulations of MOND. *Phys. Lett.*, **B578**, 253–258.
- STAROBINSKY, A. A., 1980. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett.*, **B91**, 99–102.
- SUMNER, T. J., 2002. Experimental searches for dark matter. *Living Rev. Rel.*, **5**, 4.
- TULLY, R. B. & FISHER, J. R., 1977. A New method of determining distances to galaxies. *Astron. Astrophys.*, **54**, 661–673.
- TURNER, M. S., 1999. Dark Matter, Dark Energy and Fundamental Physics. *ArXiv Astrophysics e-prints*.
- WILL, C., 1984. The Confrontation between General Relativity and Experiment: an Update. URL citeseer.ist.psu.edu/will198confrontation.html.
- WITTEN, E., 1981. A SIMPLE PROOF OF THE POSITIVE ENERGY THEOREM. *Commun. Math. Phys.*, **80**, 381.
- ZELDOVICH, I. B., 1986. Field theory in cosmology for astronomers. *Itogi Nauki i Tekhniki Seriya Astronomiia*, **31**, 3–36.
- ZWICKY, F., 1933. Spectral displacement of extra galactic nebulae. *Helv. Phys. Acta*, **6**, 110.