



Dark matter: no!

Modified gravity: YES!

SERGIO MENDOZA <sergio@mendoza.org>

<http://www.mendoza.org/sergio>

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO (UNAM)

Talk available in

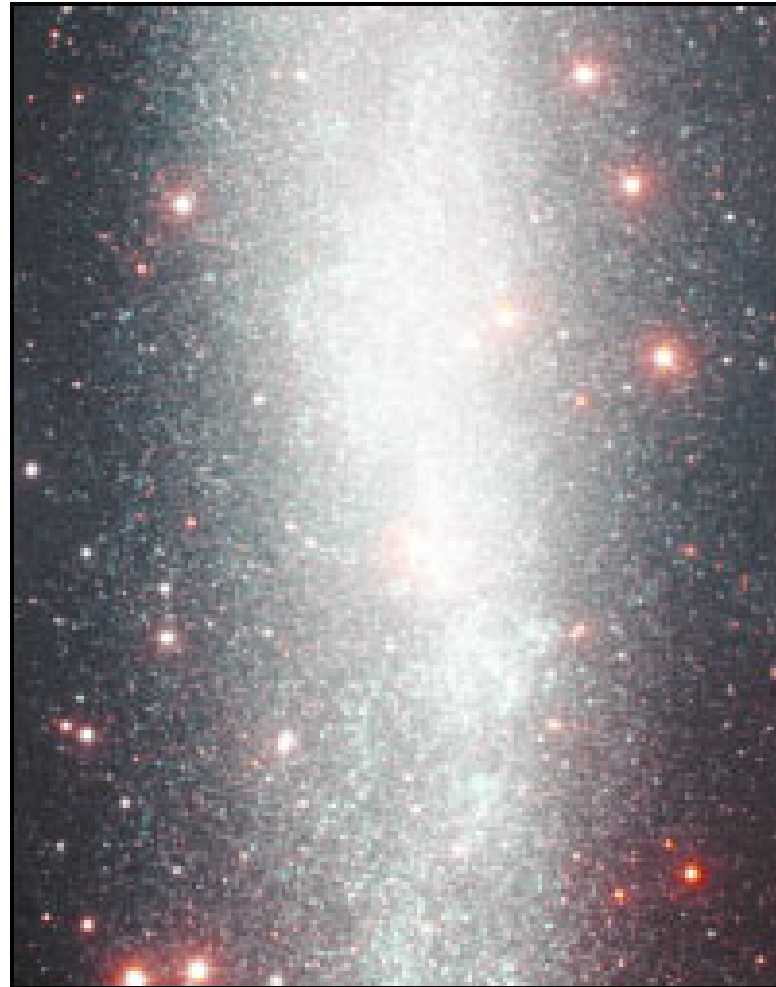
<http://www.mendoza.org/sergio/modifiedgravity>

Lecture 03, INAOE

13TH NOVEMBER, 2008

1. ¿Es MOND realmente extraña?

- ★ Scientific American, Septiembre 2004: “*Scaled-Up Darkness Could a single dark matter particle be light-years wide?*” (Tonatiuh Matos y Luis Ureña)



2. AQUAL, no-relativista

- ★ La receta para MOND implica que dos partículas acelerándose en el campo de la otra no conservan momento!!!
- ★ Para evadir problemas, basta con construir una descripción Lagrangiana de MOND. Si se deja que haya invariancia Galileana y rotacional para la densidad lagrangiana \mathcal{L} y se rompe la linealidad de la ecuación entonces

$$\mathcal{L} = -\frac{a_0^2}{8\pi G} f\left(\frac{|\nabla\Phi|^2}{a_0^2}\right) - \rho\Phi. \quad (1)$$

- ★ La función $f(x)$ está dada por el experimento

$$f(y) = \begin{cases} y, & y \gg 1; \\ 2y^{3/2}/3 & y \ll 1. \end{cases}$$

- ★ De la ecuación (1) se sigue que la ecuación de campo gravitacional está dada por

$$\nabla \cdot [\tilde{\mu}(|\nabla\Phi|/a_0) \nabla\Phi] = 4\pi G\rho, \quad \tilde{\mu}(\sqrt{y}) := df(y)/dy. \quad (2)$$

★ Con la identificación

$$a = -\nabla\phi, \quad (3)$$

se llega a que para sistemas con simetría esférica la ecuación de campo corresponde a MOND.

- ★ Simulaciones numéricas muestran que con menor simetría MOND es también aproximadamente válida.
- ★ Sin embargo es necesaria una descripción relativista de MOND para poder por ejemplo predecir deflecciones de luz gravitacionales observadas (lentes gravitacionales en cúmulos de galaxias).

3. Principios para una teoría relativista MOND

- ★ Principio de acción.
- ★ Invariancia relativista.
- ★ Principio de equivalencia.
- ★ Causalidad.
- ★ Energía positiva.
- ★ Debe existir modificaciones a la teoría Newtoniana de la gravedad (i.e. escala característica de aceleración).

4. Lo que MOND debe producir

- ★ Límite no-relativista debe estar de acuerdo con fenomenología de datos extragalácticos.
- ★ Debe producir las observaciones de lentes gravitacionales.
- ★ Debe tener predicciones en el sistema solar (e.g. perihelio de mercurio).
- ★ Concordancia con pruebas de pulsares binarios.
- ★ Debe tener “harmonía” con resultados cosmológicos.

5. AQUAL relativista

- ★ Métrica importante $\tilde{g}_{\mu\nu} := e^{2\psi} g_{\mu\nu}$.
- ★ Para no romper fuertemente con relatividad general, la acción gravitacional es tomada como la acción de Hilbert–Einstein construida con $g_{\mu\nu}$.
- ★ Las modificaciones a la dinámica se toman construyendo una densidad lagrangiana \mathcal{L}_ψ para el campo escalar como

$$\mathcal{L}_\psi = -\frac{1}{8\pi GL^2} \tilde{f} \left(L^2 g^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \right). \quad (4)$$

Si la función \tilde{f} es la identidad, entonces se obtiene el lagrangiano de un campo escalar lineal.

- ★ La acción de una partícula material es

$$S_m = -m \int e^\psi \left(-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right)^{1/2}. \quad (5)$$

★ Para movimientos lentos en una situación cuasiestática y con una métrica casi plana en donde el campo ψ es débil se obtiene la ecuación de movimiento

$$\mathbf{a} \approx -\nabla (\phi_N + \psi). \quad (6)$$

★ Ψ se determina tomando límites correspondientes para una fuente de masa M . Así $\tilde{f} = f$ y $L = 1/a_0$.

★ Problema con AQUAL relativista: las ondas producidas por el campo Ψ son superlumínicas. Además AQUAL no produce deflexión extra en la luz mas allá de lo que predice Relatividad General de Einstein.

6. Teoría PCG (Phase Coupled Gravity)

- ★ PCG fue propuesta para resolver los problemas de acausalidad de AQUAL.
- ★ Se siguen tomando $g_{\mu\nu}$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}$ pero el campo escalar Ψ se acopla con otro campo escalar A de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{\psi,A} = -\frac{1}{2} \left[g^{\alpha\beta} \left(A_{,\alpha} A_{,\beta} + \eta^{-2} A^2 \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \right) + \mathcal{V}(A^2) \right], \quad (7)$$

con η un parámetro real y \mathcal{V} una función real. Cuando $\eta \ll 1$ se obtienen las propiedades de AQUAL.

- ★ La ventaja de PCG es que involucra solamente primeras derivadas de forma cuadrática. Esto aparentemente elimina superluminidad. Sin embargo análisis detallados (con la eikonal) muestran lo contrario.
- ★ MOND se obtiene con $\mathcal{V} = \varepsilon^{-2} A^6 / 3$

7. ¿Por qué no utilizar una teoría métrica $f(R)$?

- ★ Históricamente Jordan, Brans & Dicke demostraron que con campos escalares se modifica la gravitación (aunque esto fue hecho para $G(t)$).
- ★ Los campos que cargan la información en partículas del modelo standard son campos escalares.
- ★ Soussa (2003,2004) mostró un “no-go theorem” en el cual se indica que no se puede tener una teoría métrica que a la vez explique curvas de rotación y que la deflexión de la luz sea mayor en lentes (que relatividad general) a menos que la teoría propuesta sea inestable. [astro-ph/0307358](#), [astro-ph/0310531](#).
Nota: Mendoza & Rosas-Guevara (2007) dieron un contraejemplo a este no-go theorem. [astro-ph/0610390](#)

8. Tensor Vector Scalar (TeVSeS)

★ astro-ph/0412652, astro-ph/0509519, astro-ph/0701848.

★ Metrica de Einstein $g_{\mu\nu}$, 4-vector como-tiempo \mathcal{U}_α que satisface

$$g^{\alpha\beta}\mathcal{U}_\alpha\mathcal{U}_\beta = -1, \quad (8)$$

un campo escalar ϕ dinámico y un campo escalar σ no dinámico.

★ La acción geométrica S_g está dada por (e.g. relatividad general)

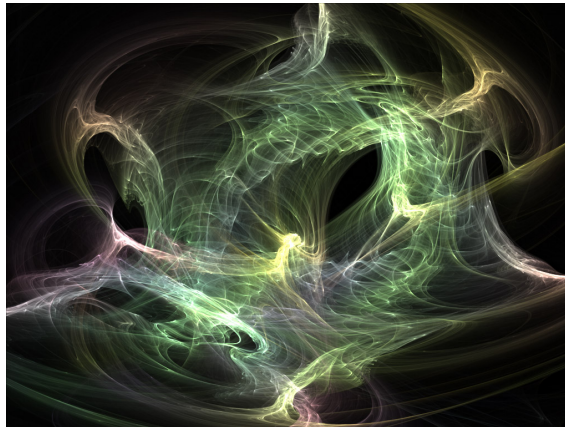
$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{-g}. \quad (9)$$

★ Se construyen tres acciones mas: S_s , $S_{\mathcal{U}}$, S_m y la acción total

$S = S_g + S_s + S_{\mathcal{U}} + S_m$ se varía con respecto a los campos bases $g^{\mu\nu}$, ϕ , σ y \mathcal{U}_α .

9. Gravitational waves in $f(R)$

- ★ From the very beginning, one expects that propagation of gravitational waves must occur at the velocity of light in vacuum.
- ★ In fact it can be shown that gravitational waves in these theories are luminal iff $f(R) = R^n$ with n any real number. This proof is *NOT* TRIVIAL!
- ★ For more information check: Mendoza & Rosas-Guevara (astro-ph/0610390) and Jaime & Mendoza (2008) -proceedings of "Spanish Relativity Meeting".



10. Which $f(R)$ function reproduces the galactic phenomenology?

- ★ By searching for a relativistic limit with AQUAL Mendoza & Rosas-Guevara (2007) proposed $f(R) = R^{3/2}$. This does not reproduce the galactic phenomenology since it doesn't flatten rotation curves.
- ★ A better way is to solve the $f(R)$ field equations for a Schwarzschild-like metric. Imposing the condition that $v := df/dR$ must be a parametric function $v(r, \alpha)$ where α is a small parameter in such a way that when $\alpha \rightarrow 0$, then $v(r, \alpha) \rightarrow 1$.
- ★ The following solution is obtained for the metric coefficients (Sobouti 2007):

$$g_{tt} = \frac{1}{(1 - \alpha)} \left[1 - \left(\frac{s}{r} \right)^{(1 - \alpha/2)} \right], \quad g_{rr} = \left(\frac{r}{s} \right)^\alpha \frac{1}{g_{tt}}, \quad (10)$$

where s is a constant of integration. If $\alpha=0$, these expressions converge to the metric coefficients of a Schwarzschild metric $s = 2MG/c^2$.

★ The form of f turns out to be (Sobouti, 2007):

$$f = (3\alpha)^{\alpha/2} R^{(1-\alpha/2)} \approx R \left[1 - \frac{\alpha}{2} \ln R + \frac{\alpha}{2} \ln(3\alpha) \right]. \quad (11)$$

★ Capozziello et al. (2007) used statistics of different spiral galaxies and assumed $f(R) = R^n$ to obtain $1.34 \lesssim n \lesssim 2.41$.

★ In general, Sobouti's model seems to be better since it can be treated as a small correction to Einstein's gravity and reduces the order of the differential equations to the 2nd order.

11. Motion on a central field

- ★ In galactic dynamics a star is treated as a test particle orbiting about a central object.
- ★ To calculate the orbit, one must solve the geodesic equation.
- ★ Using the previous equations for a circular orbit one can find the velocity measured by an observer at infinity:

$$v^2 \approx \frac{1}{2}\alpha c^2 + \frac{GM}{r} \left[1 + \frac{1}{2}\alpha \left\{ -1 + \ln\left(\frac{rc^2}{2GM}\right) \right\} \right]. \quad (12)$$

- ★ Note that the velocity approaches an asymptotic limit v_∞ as the particle separates from the mass distribution ($\alpha = 2v_\infty/c^2$)
- ★ Note: Saffari (2007) wanted to prove + of (12) and argue that most probably all the subsequent results were wrong. This was already made in the BSc thesis of Y.M. Rosas-Guevara!!!

★ The relation between the velocity v and the mass is not given explicitly. Sobouti (2007) made statistics with 40 spiral galaxies in order to find the parameter α . Also, in order to satisfy the Tully-Fisher relation, then one assumes the rotational velocity to be proportional to $M^{1/4}$ and so:

$$\alpha = \left(2.8 \times 10^{-12}\right) (M/M_{\odot})^{1/2} \quad (13)$$

★ Note that α can be better calculated for clusters of galaxies due to the spherical symmetry of the objects (Bernal & Mendoza: arXiv:0811.1800)

12. MOND

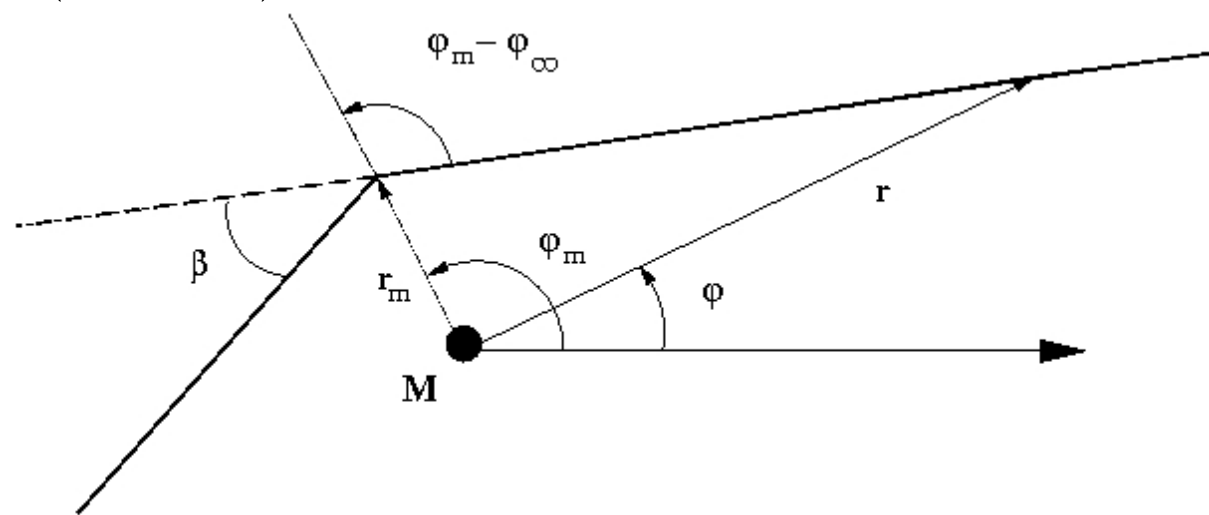
★ In the weak field limit, the following gravitational potential is obtained:

$$\phi(r) = \frac{c^2\alpha}{2} + \frac{c^2\alpha}{2} \ln(r/s) - \frac{MG}{r}. \quad (14)$$

★ From here, a MOND-like limit is obtained if we define $\alpha = \alpha_0(GM/GM_{\odot})^{1/2}$, and $a_0 = \alpha_0^2 c^4 / 4GM_{\odot}$

13. Light deflection for a system with spherical symmetry.

- ★ The light deflection that passes near a compact object is calculated by a null geodesic ($ds = 0$).

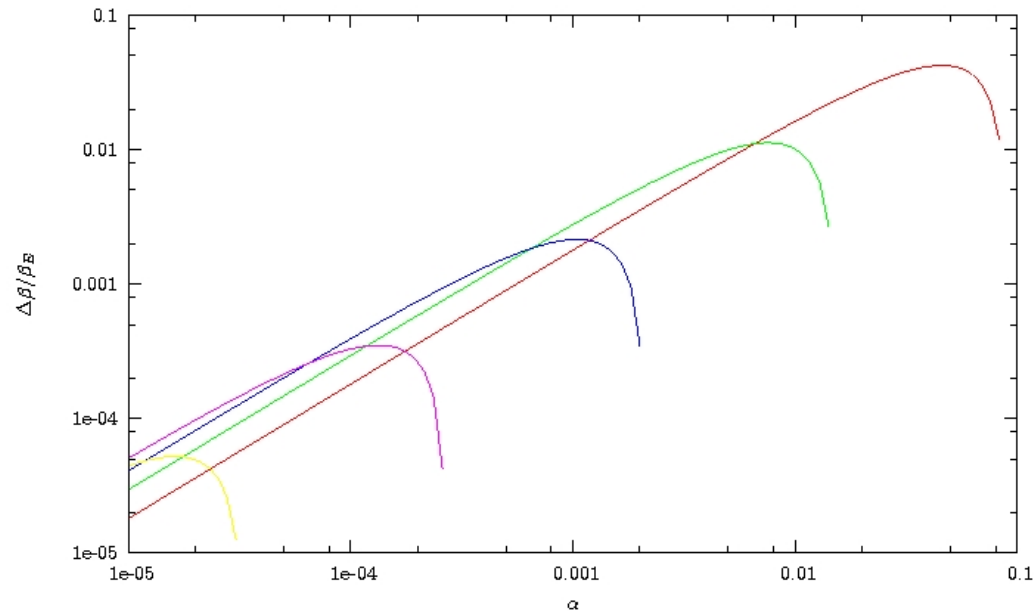


- ★ The net deflection angle β of the light trajectory due to a gravitational field characterised by Sobouti's solution has the form:

$$\beta = \pi \left[\frac{2\sqrt{1-\alpha}}{2-\alpha} - 1 \right] + 2\sqrt{1-\alpha} \left(\frac{s}{r_m} \right)^{1-\alpha/2}. \quad (15)$$

- ★ The fluctuation $\Delta\beta/\beta_E$ measures deviations from general relativity:

$$\frac{\Delta\beta}{\beta_E} = \frac{\beta - \beta_E}{\beta_E}. \quad (16)$$



14. Gravitational lenses

- ★ Modification in the position of images.
- ★ Greater amplification of images.
- ★ Greater time-dilation for the arrival time.

