Astrofísica Relativista
Examen

Sergio Mendoza <sergio@mendozza.org>
http://www.mendozza.org/sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Julio 19, 2013

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. Para el examen utiliza la siguiente notación: índices latinos toman valores 1,2,3 y los griegos 0,1,2,3, G la constante de gravitación de Newton y c la velocidad de la luz en el vacío. En todos tus cálculos enfatiza la física y explica, ¡di no a las matemáticas sin sentido!. Si por ejemplo el inciso (a) de alguna pregunta no puedes demostrarlo, pero necesitas el resultado del mismo para el (b), supón cierto (a) y continúa. Puedes utilizar las ecuaciones de la hoja de información SIN demostrarlas, pero cuando las utilices, haz referencia a las mismas. No utilices un resultado que hayamos visto en clase SIN ANTES demostrarlo. Todas las preguntas tienen el mismo peso. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. El examen tiene una duración de cuatro horas. ¡Buena Suerte! [†‡]

[†] El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación igual a cero en el curso y les calificaré con NA en el mismo.

[‡] Antes de comenzar a escribir tus respuestas, lee con calma el examen por completo. Esto ayudara a que tu mente sepa lo que tiene que resolver de antemano y comience a profundizar en todas las preguntas.

(1) Escribe un ensayo de por lo menos dos cuartillas sobre materia y energía oscuras y su contraparte sobre modificaciones a la teoría gravitacional. Utiliza las matemáticas necesarias (pero no muchas) y física, mucha física. El escrito debe por lo menos contener lo siguiente:

(·) Explica el sustento fenomenológico que tiene la suposición de materia oscura en un contexto astrofísico y cosmológico. Enumera tantos ejemplos como puedas en donde se infiere la existencia de este ente. ¿De que está constituida esta materia oscura y por qué razón ha eludido una medición directa?

(·) Explica por qué razón se infiere la existencia de energía oscura y como ésta puede estar asociada a una constante cosmológica. ¿Por qué razón se introdujo una constante cosmológica en las ecuaciones de campo de Einstein y que significado físico tiene? ¿Cómo se representa la ecuación de estado general de la energía oscura y como puede interpretarse? ¿Cómo puede ser el vacío energía oscura?

(·) Argumenta el por qué es válido negar la existencia de entes oscuros en el universo y por ende es perfectamente aceptable hacer una extensión a la gravitación tanto a nivel Newtoniano como relativista. ¿En qué consiste esta extensión a nivel relativista y no-relativista?

(·) Explica en que está basada la construcción de las ecuaciones de campo de Einstein y por qué es posible extenderlas.

(2) Considera una masa M puntual en el límite no-relativista.

(a) Cuando M es la masa del sol, entonces la velocidad v de los planetas alrededor del mismo es tal que (3ra ley de Kepler): $v \propto M^{1/2}/r^{1/2}$. Muestra de aquí que la aceleración experimentada por estos planetas es $a = -G_N M/r^2$, en donde G_N es la constante gravitacional de Newton.

(b) Cuando M es la masa de una galaxia espiral, entonces la velocidad de las estrellas en sus partes mas alejadas está dada por la relación Tully-Fisher: $v \propto M^{1/4}$. Muestra de aquí que la aceleración inferida es entonces $a = -G_N M^{1/2}/r$, y G_M es una constante modificada de gravitación. Reescribe ésta última relación como

$$a = -a_0 \frac{(GM)^{1/2}}{r}, \tag{1}$$

en donde la constante de Milgrom $a_0 \approx 10^{-10}$m/s^2. Argumenta el por qué es lo mismo trabajar con a_0 en vez de G_M.

Considera ahora una partícula de prueba relativista para la cual su acción $S_{\text{test}} = -mc\int_a^b ds$.

(c) Muestra que en el límite no-relativista, cuando $c \to \infty$, y por lo tanto el Lagrangiano $L = mv^2/2 + m\phi$, se obtiene que:

$$g_{00} = 1 + 2\phi/c^2, \text{ y que } g_{ab} = -\delta_{ab}. \tag{2}$$

Imagina ahora que necesitas construir una teoría gravitacional relativista de tal manera que en el límite cuando $c \to \infty$ recuperes las expresiones gravitacionales obtenidas en los incisos (2a) y (2b). Si la acción de materia está dada por:

$$S_m = -\frac{1}{c}\int \Lambda \sqrt{-g}\, d^4x \tag{3}$$

y el escalar de Ricci es tal que:

$$R \to -\frac{2}{c^2}\nabla^2\phi = \frac{2}{c^2}\nabla \mathbf{a}, \qquad \text{cuando} \qquad c \to \infty, \tag{4}$$

entonces:

(d) Argumenta el por qué la acción del campo gravitacional $S_g = \alpha \int d^4x \sqrt{-g}\, f(R)$, en donde f es una función arbitraria del escalar de Ricci y α una constante de acoplamiento.

(e) Para el caso de relatividad general de Einstein $f(R) = R$ y la constante de acoplamiento $\alpha = -c^3/16\pi G$. Por lo tanto la variación nula de la acción total $S = S_g + S_m$ con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ implica las ecuaciones de Einstein: $R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2 = 8\pi G T_{\mu\nu}/c^4$. Toma la traza de las ecuaciones de Einstein, el límite no-relativista cuando $c \to \infty$ y a orden de magnitud (i.e. cuando $\nabla^2 \sim 1/r^2$, $\rho \sim M/r^3$) muestra que la magnitud de la aceleración producida en una partícula de prueba es justo la aceleración Newtoniana expresada en el inciso (2a).

La manera natural de construir unas ecuaciones de campo para los lugares lejanos (como las partes externas de las galaxias espirales) semejantes a los obtenidos en el inciso (2b) es utilizando una acción gravitacional tipo $f(R)$, pero dimensionalmente adecuada:

$$S_H = \frac{c^3}{16 A_M \pi G} \int f(\chi) \sqrt{g}\, d^4 x, \tag{5}$$

en donde el escalar de Ricci adimensional:

$$\chi := R A_M, \tag{6}$$

y A_M es una constante de acoplamiento con dimensiones de área. La función $f(\chi)$ es una función arbitraria y es tal que cuando $f(\chi) = \chi$, la gravedad relativista de Einstein es recuperada. La longitud L_M tiene que estar dada por los parámetros fundamentales del problema. Las ecuaciones de campo extendidas para una teoría métrica de gravitación $f(\chi)$ se obtienen de las variaciones nulas de la acción de campo mas la de materia con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$, y están dadas por

$$f'(\chi)\chi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(\chi) - A_M \{\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Delta\} f'(\chi) = \frac{8\pi G A_M^2}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{7}$$

en donde $\Delta := \nabla_\lambda \nabla^\lambda$ es el operador de Laplace–Beltrami.

f) Muestra que cuando $f(\chi) = \chi$, la ecuación de campo (7) converge a las ecuaciones de Einstein.

g) Calcula la traza de la ecuación (7) y considera que la función $f(\chi) = \chi^b$. Resuelve la ecuación restante a orden de magnitud en simetría esférica (e.g. $\Delta \sim 1/r^2$ y $f'(\chi) \sim f(\chi)/\chi$) y muestra que si el escalar de Ricci $R \sim \kappa \sim R_c^{-2} \gg r^{-2}$, en donde κ es la curvatura Gaussiana del espacio–tiempo y R_c es el radio de curvatura del mismo, entonces

$$3\left(\frac{A_M}{r^2}\right)\chi^{b-1} \sim \frac{8\pi G L_M^2 \rho}{c^2}. \tag{8}$$

Nota que la condición $R_c >> r$ significa que la curvatura del espacio es pequeña, i.e. $\kappa << 1$, lo cual ocurre lejos de las fuentes que producen los campos gravitacionales, como en las regiones mas externas de las galaxias espirales.

Utilizando las las aproximaciones necesarias a orden de magnitud como en el inciso anterior, muestra que la relación (8) converge en el límite no-relativista, i.e. cuando $c \to \infty$, a la relación para la aceleración del inciso escogiendo de manera adecuada la constante de acoplamiento A_M y la cantidad b . A orden de magnitud ¿qué valor deben tener la constantes A_M y b?

(3) Considera un universo isotrópico como el nuestro en donde el principio cosmológico es válido.

(a) Asume que el universo es tal que existe constante cosmológica, radiación y materia. Define el parámetro de densidad $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ en donde el subíndice i se refiere a materia (M), radiación (R), curvatura (κ) y constante cosmológica (Λ). Para cada caso, este parámetro de densidad está definido respectivamente por

$$\Omega_{M_0} := \frac{8\pi G \rho_{M_0}}{3H_0^2}, \qquad \Omega_{R_0} := \frac{8\pi G \rho_{R_0}}{3H_0^2}, \tag{9}$$

$$\Omega_{\kappa_0} := -\frac{c^2}{a_0^2 H_0^2} = -\frac{c^2 \kappa}{H_0^2}, \qquad \Omega_{\Lambda_0} := \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \tag{10}$$

Muestra con esto que la constante de Hubble $H(t)$ definida para cualquier tiempo cósmico t, i.e. la velocidad de expansión del universo, satisface la relación

$$H^2(a) = H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_{R_0}}{a^4} + \frac{\Omega_{M_0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\kappa_0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda_0} \right\}. \tag{11}$$

Finalmente muestra con esto que

$$\Omega_{M_0} + \Omega_{\kappa_0} + \Omega_{\Lambda_0} = 1. \tag{12}$$

(b) Muestra que si a *cualquier* época en el universo se definen los parámetros

$$\Omega_M := \frac{8\pi G \rho}{3H^2}, \quad \Omega_\kappa := -\frac{\kappa c^2}{a^2 H^2}, \quad \Omega_R := \frac{8\pi G \rho}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2}, \tag{13}$$

entonces se cumple la relación

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1, \tag{14}$$

para cualquier tiempo cósmico t. Muestra además que si se conoce H_0 de manera observacional, entonces se conoce directamente Λ y $\rho_M 0$ de las observaciones de Ω_{Λ_0} y Ω_{κ_0}. Si además $\kappa = 0$ muestra entonces que el valor de H_0 es entonces conocido. ¿Qué significado físico tiene esta última condición?

(c) Considera la época temprana del universo y muestra que una constante cosmológica implica expansión exponencial en el universo. De manera alternativa, también para la misma época del universo considera el vacío y supón que no hay constante cosmológica, pero si una diferente gravedad $f(R)$ a esa época. Usa el hecho de que el escalar de Ricci para la métrica de FLRW está dado por:

$$R(t) = 6\left\{\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2}\right\}, \tag{15}$$

y la traza de la ecuación de campo (7) para mostrar que si $f(R) = R^n$ entonces se obtiene un crecimiento exponencial, i.e. $a \propto e^t$ si $n = 2$. ¿Qué puedes concluir de estas dos visiones?

(d) Define y explica el corrimiento al rojo z aplicado a la recesión de galaxias en el universo. De aquí muestra la ley de Hubble $v = H_0 r$, donde v es la velocidad de recesión de una galaxia, r su distancia y H_0 es la constante de Hubble. ¿Por qué razón la constante de Hubble no es una "verdadera" constante?

(e) La ecuación de estado (presión p como función de la densidad de energía e o densidad de masa ρ) para la energía oscura en el universo está dada por:

$$p_X = \omega c^2 \rho_X, \tag{16}$$

done ω es una constante negativa menor a $-1/2$ (y muy probablemente ~ -1 de acuerdo a observaciones de las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo en microondas). Muestra que:

$$\rho_X \propto a^{-3(1+\omega)}, \tag{17}$$

$$\rho_X/\rho_M \propto (1+z)^{3\omega}, \tag{18}$$

donde ρ_M es la densidad de masa y z es el corrimiento al rojo. Muestra que el parámetro de desaceleración está dado por:

$$q_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\omega\Omega_X \sim \frac{1}{2} + \omega \tag{19}$$

Explica con esto el por qué $\omega < -1/2$ implica una expansión acelerada. Muestra que la constante de Hubble $H(z)$ está dada por:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X \exp\left\{3\int_0^z [1+\omega(x)]\, d\ln(1+x)\right\} \tag{20}$$

Muestra que para que el universo se recolapse es necesario que $\omega > -1/3$. ¿Qué deduces de esto?

(f) Muestra que el corrimiento al rojo z y el factor de escala $a(t)$ están relacionados mediante la fórmula

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}. \tag{21}$$

(4) Considera un plasma astrofísico sin rotación que es acretado hacia un agujero negro de Schwarzschild. En este problema se han escogido unidades geometrodinámicas para las cuales la velocidad de la luz c y la constante universal de gravitación de Newton G son tales que $G = c = 1$.

Cuando las ecuaciones de la hidrodinámica se tienen que escribir en la presencia de un campo gravitacional significante hay que reemplazar algunas derivadas ordinarias en las ecuaciones de movimiento por derivadas covariantes. La ecuación de continuidad, la ecuación de Euler y la ecuación de conservación de la entropía se escriben respectivamente de la siguiente manera (¡¡¡no lo demuestres!!!)

$$n^{\mu}{}_{;\mu} = 0 \tag{22}$$

$$\omega u^{\mu} u_{\nu;\mu} = \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} - u_{\nu} u^{\mu} \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} \tag{23}$$

$$(\sigma u^{\alpha})_{;\alpha} = 0. \tag{24}$$

Las dos últimas relaciones se obtienen de pedir que la divergencia generalizada del tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ sea nula, es decir,

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0. \tag{25}$$

En relatividad general se dice que un campo es estático si el cuerpo que produce el campo se encuentra fijo en el sistema de referencia en el cual el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ no depende de la componente temporal x^0. De esta manera, como ambas direcciones del tiempo son equivalentes entonces puede escogerse un sistema de referencia en el cual el intervalo ds no varíe cuando se cambie el signo de x^0 y por lo tanto $g_{0\alpha} = 0$ para dicho campo.

(a) Muestra que cuando la tres velocidad del fluido $v = dx^k/d\tau = dx^k/\sqrt{g_{00}dx^0}$ entonces la cuatro–velocidad $u^{\alpha} := dx^{\alpha}/ds$ satisface:

$$u^{\alpha} = 0, \qquad u^0 = \gamma/\sqrt{g_{00}}, \qquad u_0 = \sqrt{g_{00}}\gamma. \tag{26}$$

(b) Considera ahora un flujo adiabático y muestra con ayuda de la primera ley de la termodinámica (o de cualquier otra manera) que la ecuación (23) implica que

$$u^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{w}{n} u_{\eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} \left(\frac{w}{n} \right) + \frac{w}{n} u^{\alpha} u_{\delta} \Gamma^{\delta}_{\eta\alpha}, \tag{27}$$

(c) Muestra que la componente temporal de la ecuación (27) es

$$\gamma \frac{\boldsymbol{v}}{c} \cdot \nabla \left(\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} \right) = 0. \tag{28}$$

Concluye de aquí que a lo largo de una línea de corriente se sigue que la cantidad

$$\frac{w}{n}\gamma\sqrt{g_{00}} = \text{ const.}, \qquad \text{o bien} \qquad \frac{w}{n}u_0 = \text{const.} \tag{29}$$

es una constante. Este resultado generaliza la ecuación de Bernoulli en campos gravitacionales fuertes.

(d) Muestra que en el espacio-tiempo de Schwarzschild la velocidad

$$u_0 = \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right)^{1/2}. \tag{30}$$

y por lo tanto la ecuación de Bernoulli es

$$\frac{p+e}{n}\left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right)^{1/2} = \text{const.}, \tag{31}$$

para cada línea de corriente.

(e) Muestra utilizando la ecuación de continuidad (22) que para este flujo de acreción radial sobre el agujero

$$n u r^2 = \text{const.}, \tag{32}$$

Hoja de información†

Métrica de Robertson–Walker:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= c^2dt^2 - a^2(t)\left\{dr^2 + \mathfrak{R}^2\sin^2(r/\mathfrak{R})d\Omega^2\right\} \\
ds^2 &= c^2dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2d\Omega^2\right\},
\end{aligned} \tag{33}
$$

Ecuaciones de Friedmann:

$$\dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \tag{34}$$

$$\ddot a = -\frac{4}{3}\pi G a\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda a, \tag{35}$$

$$\dot a^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda a^2. \tag{36}$$

Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{(1-\frac{2GM}{rc^2})} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{37}$$

Métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist:

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& \frac{(\Delta - a^2\sin^2\theta)dt^2}{\Sigma}c^2dt^2 - 2a\sin^2\theta\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}dtd\varphi - \\
&- \frac{(r^2+a^2) - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2,
\end{aligned} \tag{38}
$$

en donde

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{39}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2. \tag{40}$$

† Puedes utilizar cualquier ecuación en esta página sin demostrarla.