

Astrofísica Relativista

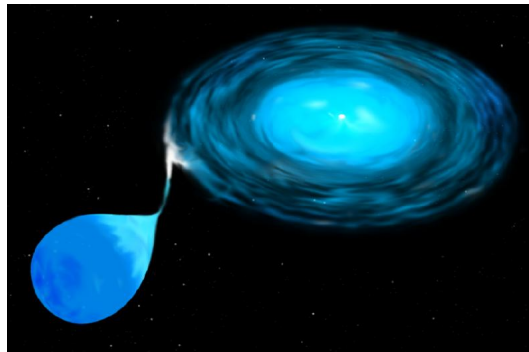
Sergio Mendoza

Instituto de Astronomía UNAM

<sergio@astroscu.unam.mx>

<http://www.astroscu.unam.mx/~sergio>

Marzo 24, 2003



† Clase disponible en:

www.astroscu.unam.mx/~sergio/fiscont



La **astrofísica** es la rama de la astronomía que estudia las propiedades físicas de los diversos objetos y/o partículas más allá de la atmosfera terrestre.

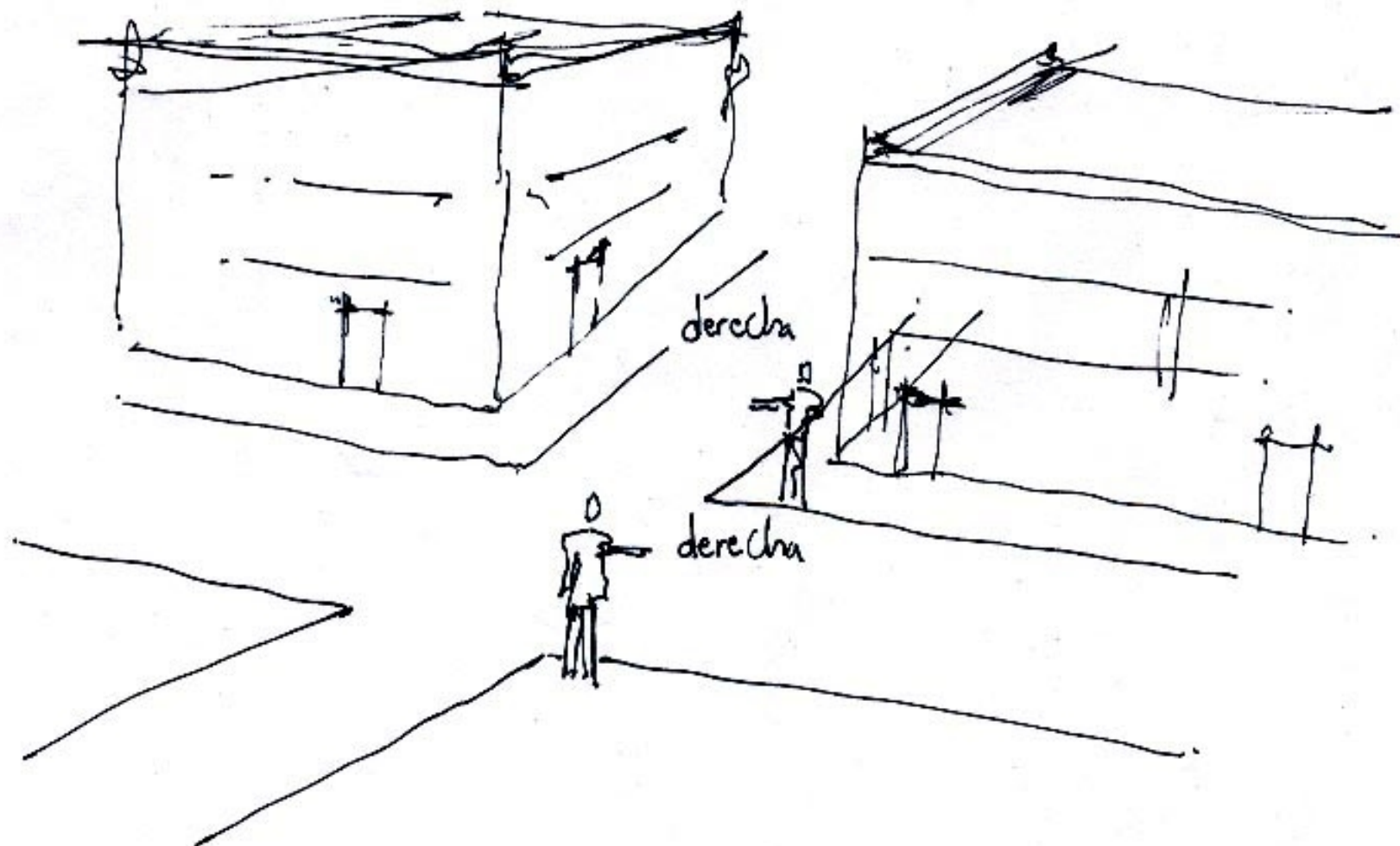
Clase 1. Relatividad

1 Introducción

- † ¿Relatividad? Todo es relativo, nada es absoluto (¡BASURA!)
- † Teoría de la Relatividad es una teoría bien establecida, con fundamentos experimentales. Fue desarrollada de manera teórica por Albert Einstein en 1905. Ha pasado todas las pruebas experimentales hasta la fecha y siempre ha salido vencedora.



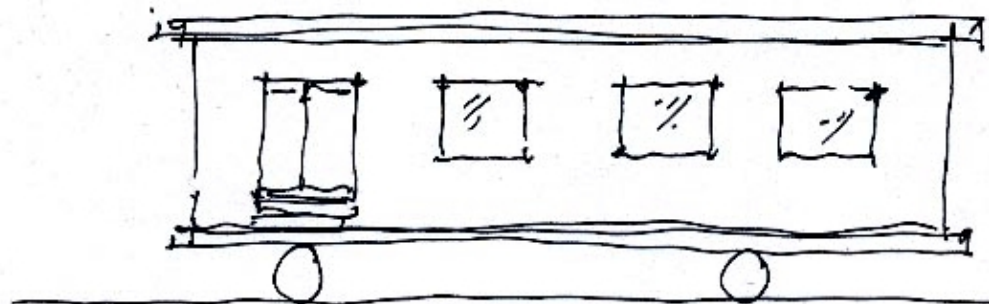
¿Quién tiene la razón?



¿Derecha?

2 Principio de relatividad

- † Sistema de referencia inercial es aquel cuyos acelerómetros marcan cero en todas las direcciones. Un objeto en movimiento uniforme rectilíneo en un sistema de ref. inercial permanecerá por siempre en movimiento uniforme y rectilíneo.
- † Principio de relatividad. Las leyes de la física toman la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales (acelerómetros marcan cero en todas las direcciones). Dicho de otro modo, todos los sistemas de referencia inercial son equivalentes.



Tren de Einstein

3 Propagación de interacciones

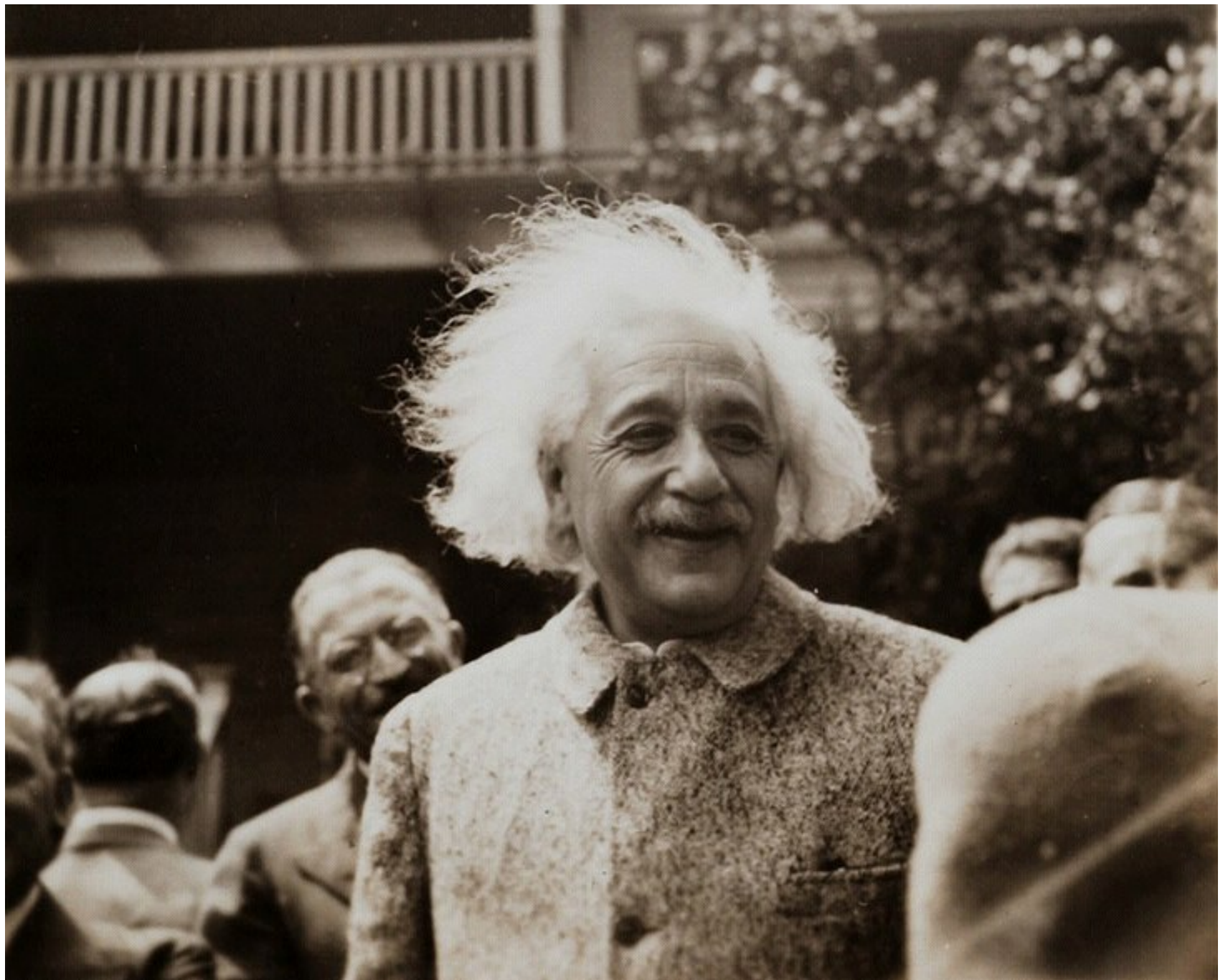
- † Antigüedad: Transmisión de información viaja a velocidad infinita.
- † Principio de relatividad de Galileo. Es el principio de relatividad con la suposición de que la transmisión de las informaciones es infinita, ie: $c = \infty$.
- † Hoy: Transmisión de información viaja a una velocidad máxima, la velocidad de la luz en el vacío.
- † Principio de relatividad de Einstein. Es el principio de relatividad con la suposición de que la transmisión de las informaciones es finita, ie: $c = 300\,000 \text{ km/s}$.
- † Definición: Un evento es un suceso ocurrido a un tiempo t en una determinada posición r .



Galileo Galilei



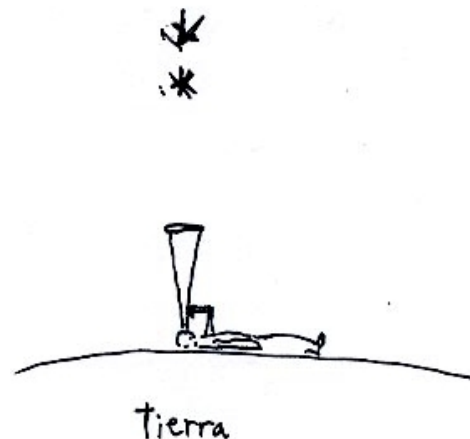
Isaac Newton



Albert Einstein

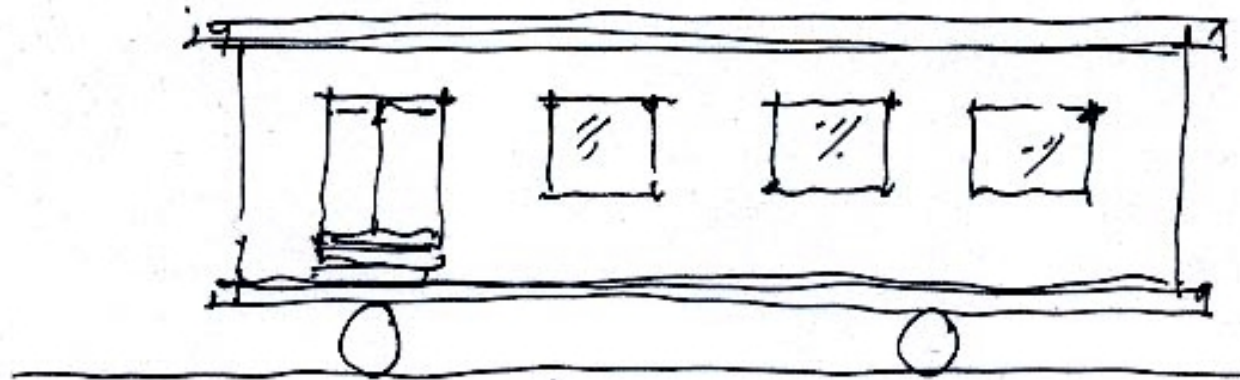
4 Relatividad del espacio

- † El espacio es relativo (teoría clásica y relativista).
- † Dos estrellas ocupan el mismo punto en la boveda celeste. ¿Están en el mismo punto para todos los observadores?
- † En un viaje de autobus Tijuana–Mérida, dos mujeres escriben cartas a sus maridos en la ciudad de México. Los maridos se enteran de la posición de sus esposas mediante el sello postal. Según las mujeres, todo transcurre dentro del autobus. Los maridos dicen que los eventos (escrituras de cartas) han ocurrido a distintos tiempos ¿Quién tiene razón? ¡Ambos!



5 Propagación de la luz

- † La luz se propaga de forma finita (pensamiento ya desde Newton).
- † Siglo XIX se mide la velocidad de la luz.
- † Velocidad de la luz es máxima en el vacío. Es más lenta al viajar en otros medios (ej: cristal).
- † ¡Las ondas electromagnéticas se parecen al sonido! Pero el sonido se propaga a través del aire, la luz no.
- † Propagación de una bala en un tren en movimiento:



Velocidad de la bala con respecto a las paredes del tren es la misma (velocidad de disparo de bala del tren en reposo)

† Propagación de la luz en un tren en movimiento:

$$v_{\text{tren}} = 240000 \text{ km/s} \Rightarrow$$

★ Cuando se enciende foco del vagón trasero, el pasajero del frente ve:

$$v_{\text{prop luz}} = 300\,000 - 240\,000 = 60\,000 \text{ km/s.}$$

★ Cuando se enciende foco del vagón delantero, pasajero de atrás ve:

$$v_{\text{prop luz}} = 300\,000 + 240\,000 = 540\,000 \text{ km/s.}$$

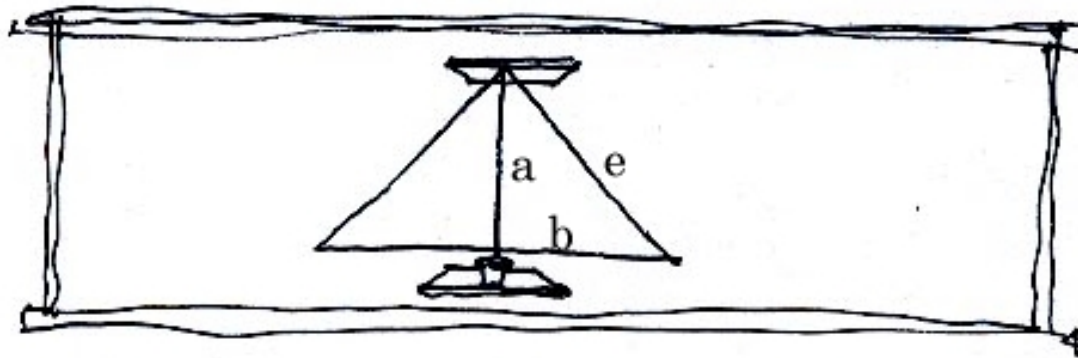
† \Rightarrow ¡Parece que la velocidad de la luz está en contradicción con el principio de relatividad!

† Así se introduce el **eter** (medio por el cual se propaga la luz).

- † Respecto al eter universal, la luz viaja a misma velocidad en todas direcciones
- † En un tren que se mueve con respecto al eter, la velocidad de propagación es diferente en distintas direcciones.
- † ¡Confusión!
- † Reconsiliación: experimento de Michelson (1881). La velocidad de la luz en la dirección de rotación de la tierra y en dirección contraria es la misma.
- † \Rightarrow “ La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales”
- † Einstein construyo su teoría, la teoría de la relatividad basada en el principio de relatividad y en los resultados del experimento de Michelson.

6 Relatividad del tiempo

- † Sabemos que intervalos de distancia son relativos. El hecho de que la velocidad de transmisión de información se lleve a cabo a velocidades finitas implica que !los intervalos de tiempo también resultan ser relativos!



$$a = c\tau/2,$$

$$b = vt/2,$$

$$e = ct/2.$$

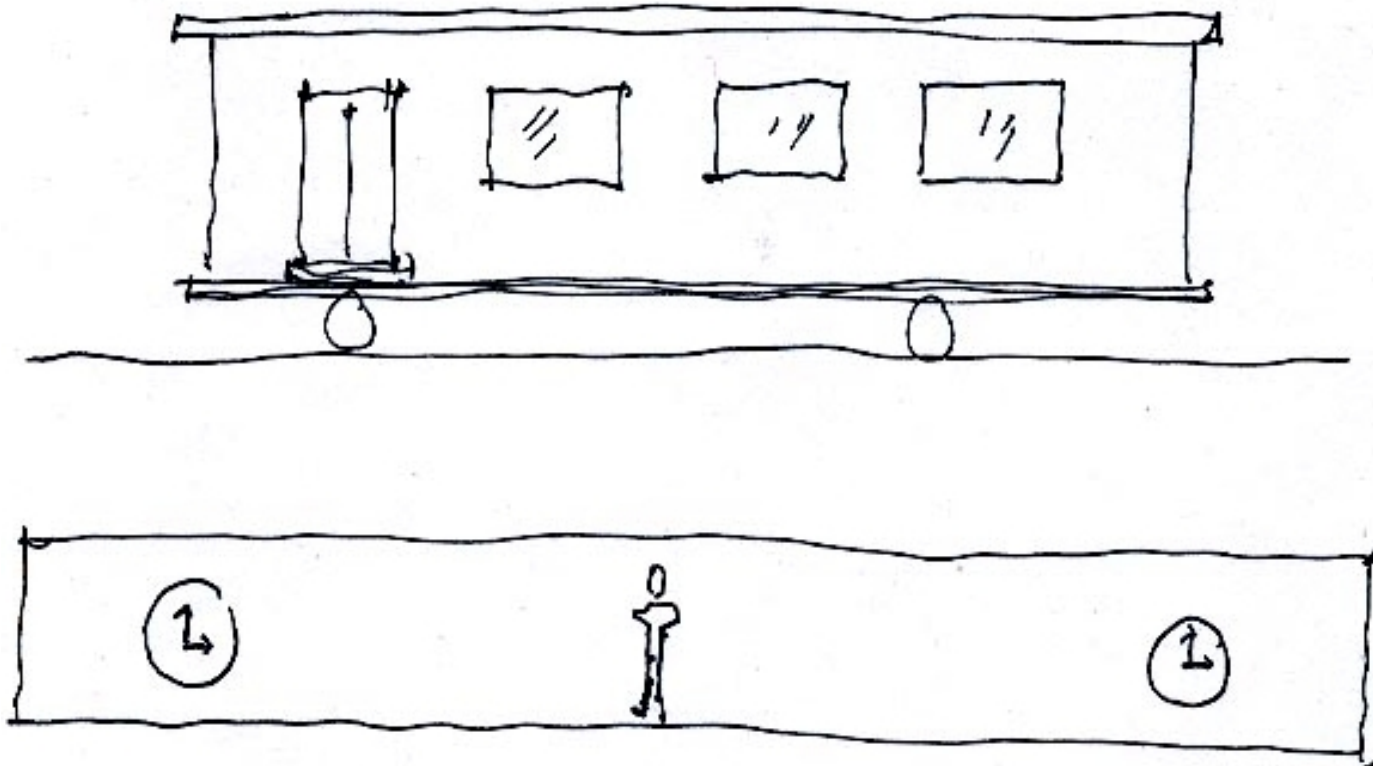
Veamos como se propaga la luz que sale del piso del **tren de Einstein** y que se refleja en un espejo colocado en el techo. Para un pasajero del tren, la luz tardó en ir y regresar un tiempo τ . La distancia recorrida por este haz de luz fué $c\tau$. Un observador externo (en un andén) observa que el tren se mueve con velocidad v , y observa que transcurrido un intervalo de tiempo t la luz recorre las caras superiores del triángulo cuya distancia es ct . Debido a que el tren viaja con velocidad v , la base del rectángulo es vt . De esta manera, utilizando el teorema de Pitagoras se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ct}{2}\right)^2 &= \left(\frac{c\tau}{2}\right)^2 + \left(\frac{vt}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \quad &\boxed{t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}} \Rightarrow \boxed{t > \tau}. \end{aligned} \quad (1)$$

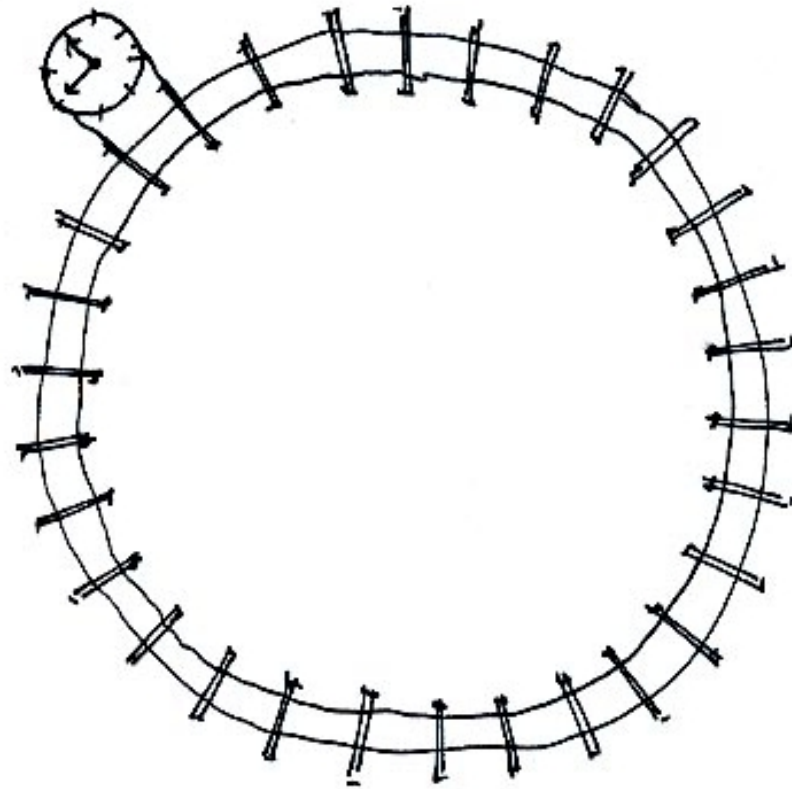
† Esto se conoce como la **dilación del tiempo**.

7 Comparación de relojes

- † Supongamos que el tren de Einstein viaja de Monterrey a la Ciudad de México. Al entrar al tren un viajero sincroniza su reloj con el del andén. Al bajar del tren ve que su reloj está atrasado con respecto al reloj del andén en la Cd. de México. ¡Situación no simétrica!. Un reloj abordo, dos relojes en los andenes (uno en Monterrey y otro en Cd. de Méx.).

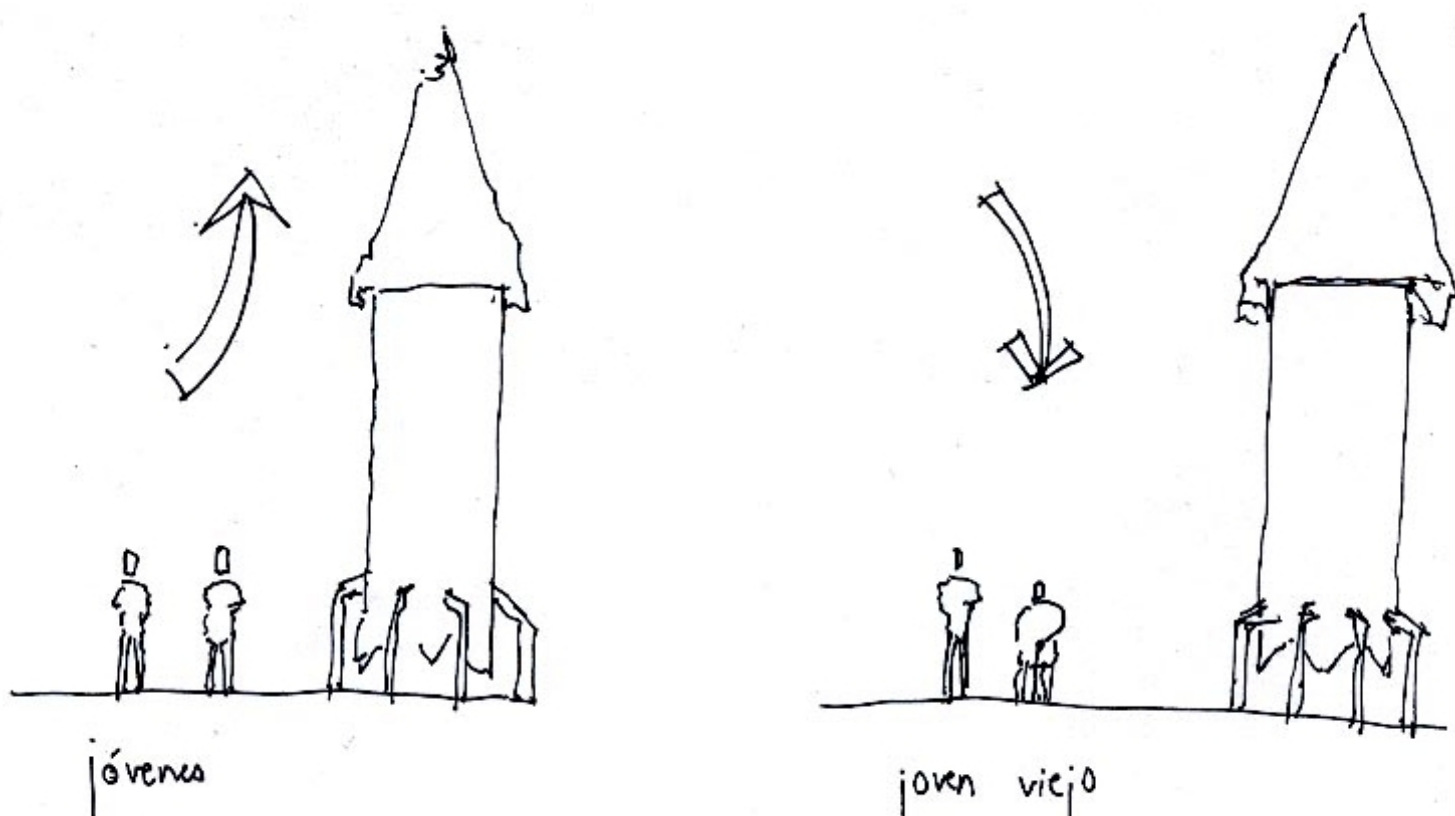


- † ¿Y si el tren viaja en una trayectoria cerrada?
Digamos de Monterrey a la Cd. de México y luego de la Cd. de México a Monterrey.
- † En este caso solo hay dos relojes que comparar, el del pasajero del tren y el del andén en Monterrey. ¡La situación es simétrica!



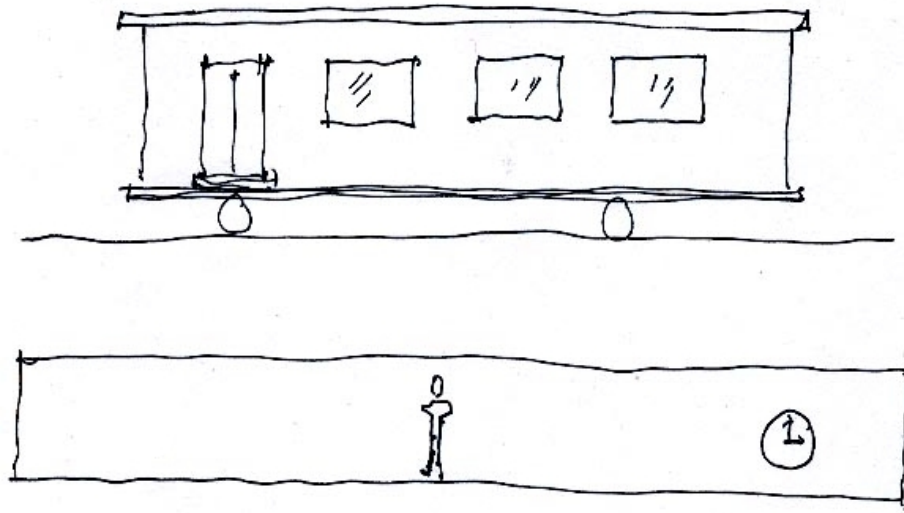
8 Viaje en el tiempo

- † Existe posibilidad de viajar en el tiempo: “al futuro”.
- † Costos de energía elevados para realizar viajes a las estrellas.
- † Problemas de **causalidad**. ¿Puedo encontrar un sistema de referencia en el cual yo me vea morir a mi mejor amigo y tiempo mas tarde, lo vea nacer?
Respuesta: ¡**NO**!



9 Contracción de Lorentz

- † Tiempo y espacio dependen del observador.
- † Así la longitud de objetos también varía.



Vemos pasar el tren de Einstein.

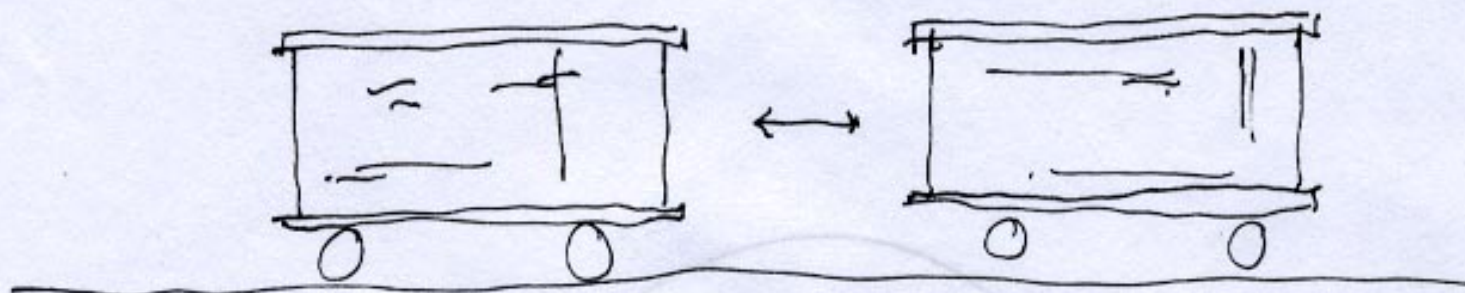
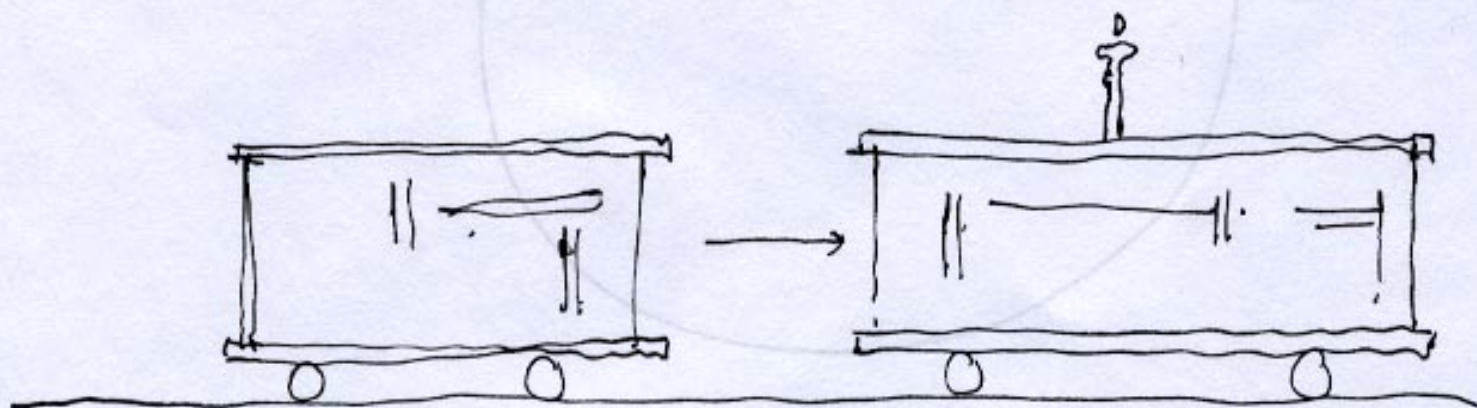
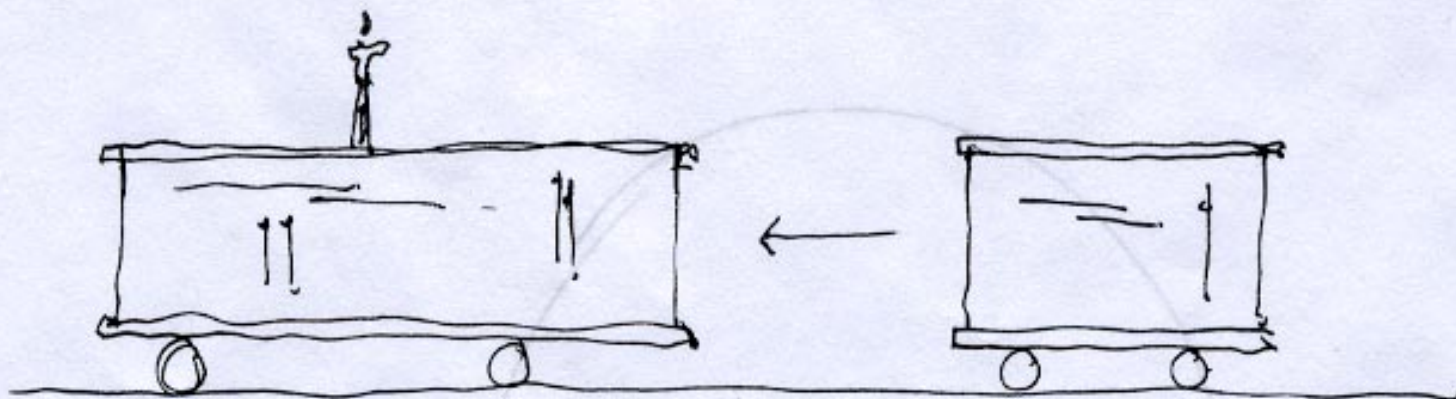
- † Tiempo transcurrido en su paso: τ
- † Tamaño del tren (visto por observador en andén):
 $d = c\tau$
- † Colocando espejos en los extremos del tren, un pasajero mide que la distancia del tren de un punto a otro es: $D = ct$.

† Debido a que $t = (1 - (v/c)^2)^{-1/2} \tau$ entonces:

$$D = ct = c \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{d}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$
$$\Rightarrow \boxed{D = \sqrt{1 - (v/c)^2} d} \Rightarrow \boxed{d < D.} \quad (2)$$

† Esto se conoce como la **contracción de Lorentz** o **contracción de las longitudes**.

† Un tren de longitud propia L se mueve con velocidad v e intenta entrar a un tunel de longitud propia L .
Pasajeros a bordo del tren dicen que el tunel mide menos que el tren. Obreros en el tunel dicen que el tren mide menos que el tunel. La pregunta es: ¿Cabe, no cabe o justo queda el tren en el tunel?



† Para resolver el problema anterior toma un sistema de referencia en que el tunel se mueve hacia el tren con velocidad $v/2$ y así el tren con respecto al tunel se mueve con velocidad $v/2$. Así, un observador en este sistema de referencia, observa la misma contracción de Lorentz tanto para el tren como para el tunel. Por lo tanto el tren **justo cabe** en el tunel.

10 Diagramas espacio–tiempo

- † El **espacio**: Puedo moverme en cualquier dirección (varias direcciones).
- † El **tiempo**: Mi reloj solamente camina hacia el futuro (una sola dirección)
- † En relatividad el espacio y el tiempo son **uno solo**, denominados: **espacio–tiempo**.
- † Construcción matemática. Un rayo de luz se propaga por un tiempo Δt . En este tiempo, recorre una distancia Δr . Así:

$$c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \Rightarrow \\ -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0.$$

(3)

† Definimos un pedacito de espacio–tiempo Δs como:

$$(\Delta s)^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta r^2 \quad (4)$$

Con la propiedad de que $\Delta s = 0$ para la luz.

† Creamos matemáticamente la unión entre el espacio y el tiempo.

† Se puede mostrar que en relatividad existen situaciones en las cuales el espacio se comporta como el tiempo (solo se puede viajar hacia un solo lugar) y que el tiempo se comporta como el espacio (uno puede moverse al pasado y al futuro con plena libertad). Esto ocurre dentro de ciertos agujeros negros

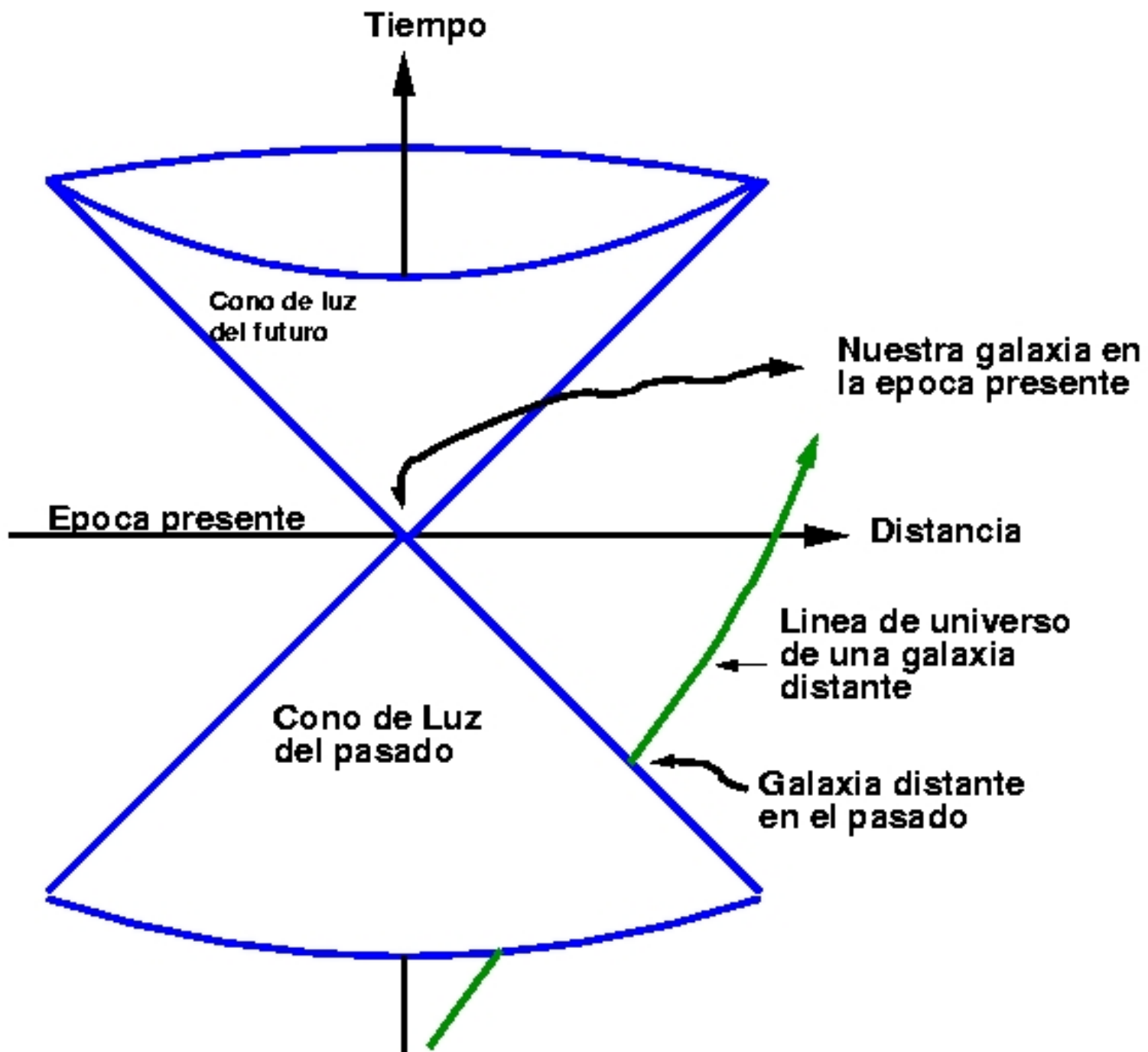


Diagrama de espacio–tiempo de Minkowski

11 Suma de velocidades

- † Consideremos bala disparada en la dirección en que se mueve el tren de Einstein. $v_{\text{bala}} = 50\text{km/h}$ y $v_{\text{tren}} = 200\text{ km/h}$.
- † Observador en el andén observa que la bala se mueve a una velocidad:

$$v_{\text{bala-obs}} = v_{\text{bala}} + v_{\text{tren}} = 150\text{ km/h}.$$

- † Las velocidades se suman
- † ¿Qué pasa si sustituimos bala con luz?
- † Solución: Las velocidades no se suman como en mecánica Newtoniana. La velocidad de la luz siempre es la misma en todos los sistemas de referencia.
- † La suma de velocidades está dada por:

$$\omega = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}. \quad (5)$$

12 Masa y energía

† Resultado importante de la teoría de la relatividad:

$$E = \frac{mc^2}{1 - (v/c)^2}, \quad (6)$$

donde m y E representan la masa y la energía de una partícula con velocidad v .

† Si la partícula está en reposo, la ec.(6) toma la conocida forma:

$$\boxed{E = mc^2.} \quad (7)$$

† La ec.(7) representa la cantidad de energía E que se puede producir al hacer un cambio en la masa m de un objeto en particular. Esta energía se conoce como la **energía en reposo** de un cuerpo.

- † Nota que para velocidades pequeñas la ec.(6) puede escribirse (expansión de Taylor) como:

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (8)$$

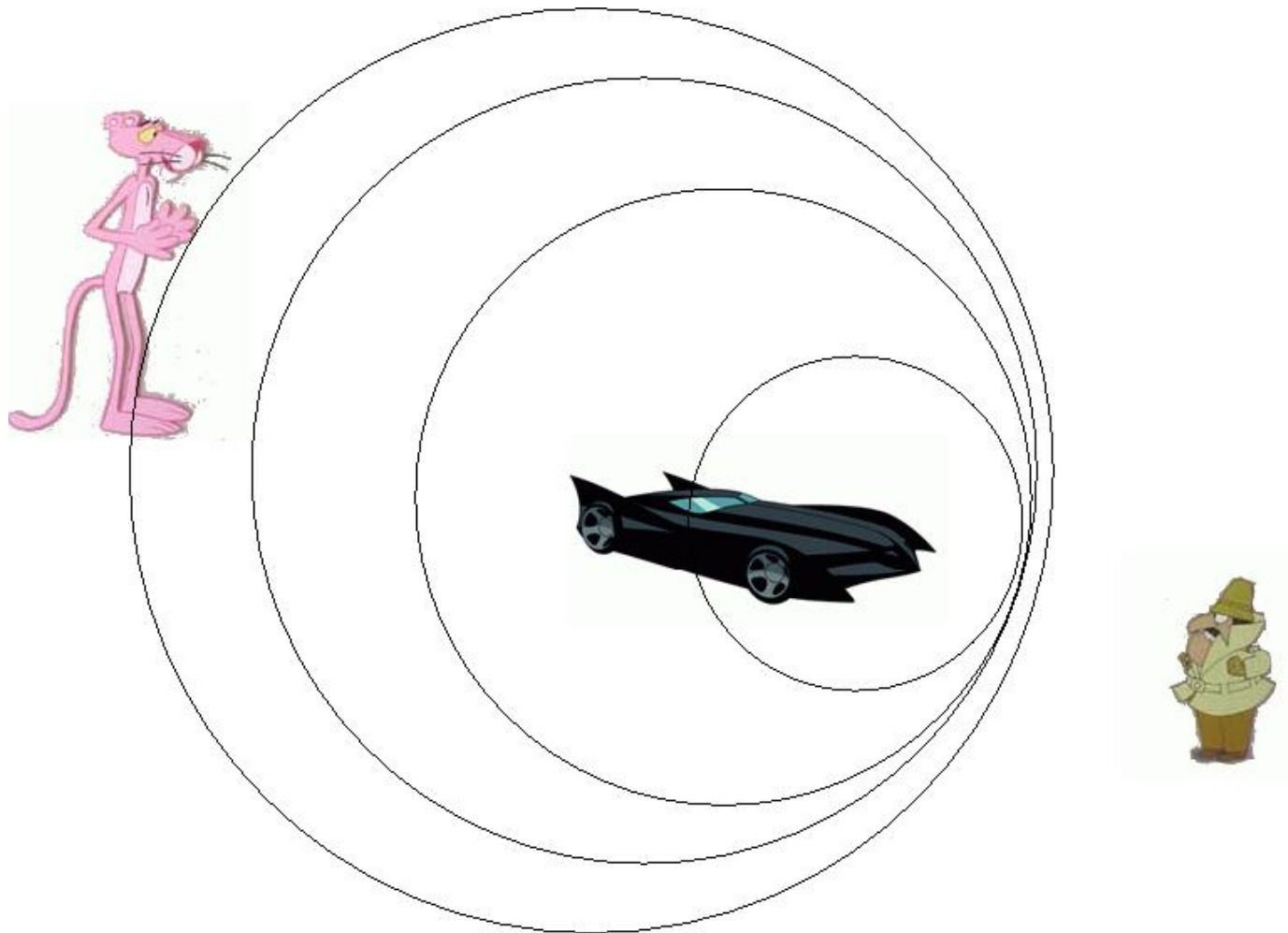
Es decir, la energía de un cuerpo es la energía en reposo mas la energía cinética a primer orden de aproximación (cuando v es pequeña).

- † La energía en reposo de un cuerpo de 1 kg es igual a 10^{17} J . Esta cantidad de energía se genera al quemar ¡tres millones de toneladas de carbon! Esto llevó a la creación de la famosa bomba atómica.
- † Video de Einstein.



13 Corrimiento al rojo

- † Debido al movimiento relativo, los tonos auditivos tienden a variar debido al **efecto Doppler**.
- † Esto se debe a que las ondas se empacan cuando el objeto en movimiento se acerca (agudos) y se expanden cuando el objeto se aleja (graves):



La luz, por su caracter ondulatorio y por su velocidad finita se comporta de la misma manera que el sonido:

- † Movimiento relativo \Rightarrow cambio en color (frecuencia)
- † Fuente acerca a nosotros \Rightarrow frecuencia aumenta (azules)
- † Fuente aleja de nosotros \Rightarrow frecuencia disminuye (rojos)

14 ¿Relatividad gravitacional?

- † Astrónomos toman en serio los efectos relativistas de la gravedad bajo ciertas circunstancias.
- † Toma una masa puntual (como la tierra) que gira alrededor de una masa M (como el sol) a una distancia r .

Fuerza gravitacional = Fuerza centrífuga

$$\begin{aligned}\frac{GMm}{r^2} &= \frac{mv^2}{r}, \quad \Rightarrow \\ \frac{GM}{r^2 c^2} &= \frac{v^2}{c^2 r}, \quad \Rightarrow\end{aligned}\tag{9}$$

- † Efectos relativistas importantes si

$$v \approx c, \quad \Rightarrow \quad \boxed{GM/c^2 r^2 \approx 1}.$$

† Definamos el parametro gravitacional χ y el radio gravitacional (o radio de Schwarzschild) r_g como:

$$x \equiv \frac{2GM}{rc^2} \quad r_g \equiv \frac{2GM}{c^2} \quad (10)$$

† Superficie de la tierra: $\chi = 1.4 \times 10^{-8}$

Superficie del sol: $\chi = 4 \times 10^{-6}$

Superficie enana blanca: $\chi = 5 \times 10^{-4}$

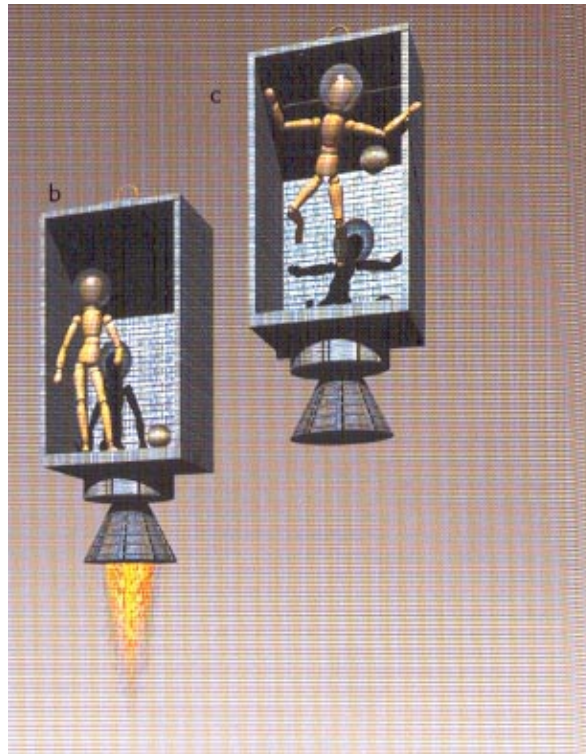
Superficie estrella neutrones: $\chi = 0.3$

Universo como un todo: $\chi = 0.1 - 1$

15 Principio de equivalencia

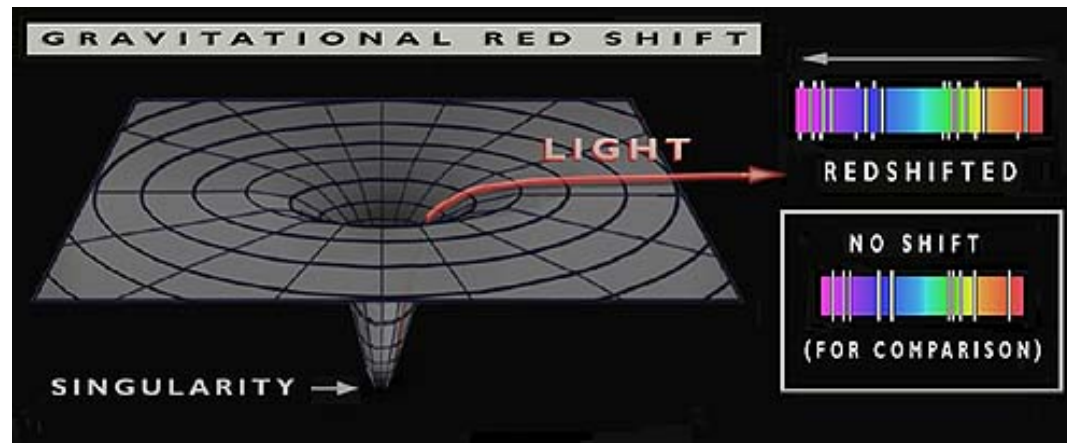
- † ¿En un campo gravitacional quién cae primero, una bola de billar o una bola de algodón? Respuesta: en ausencia de aire, ambas caen al mismo tiempo.
Experimentos de Galileo en Pisa.
- † Las aceleraciones producidas por los campos gravitacionales son iguales a las aceleraciones producidas por un sistema de referencia sin gravedad y acelerado (aceleración igual a la aceleración del campo gravitacional).
- † En otras palabras, la gravedad puede ser eliminada localmente mediante una aceleración de magnitud igual y dirección opuesta a la aceleración del campo gravitacional.
- † La equivalencia entre los campos gravitacionales y sistemas de referencia acelerados fué formulada por Albert Einstein y se conoce como el principio de equivalencia.

- † Diferencias entre campos de gravitación y sistemas de referencia acelerados:
- * Campos gravitacionales se anulan en infinito ($GM/r \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$).
 - * Sistema de referencia uniformemente acelerado no anula su aceleración en infinito
- † Por lo tanto, el principio de equivalencia es válido solamente en una vecindad del punto en cuestión.



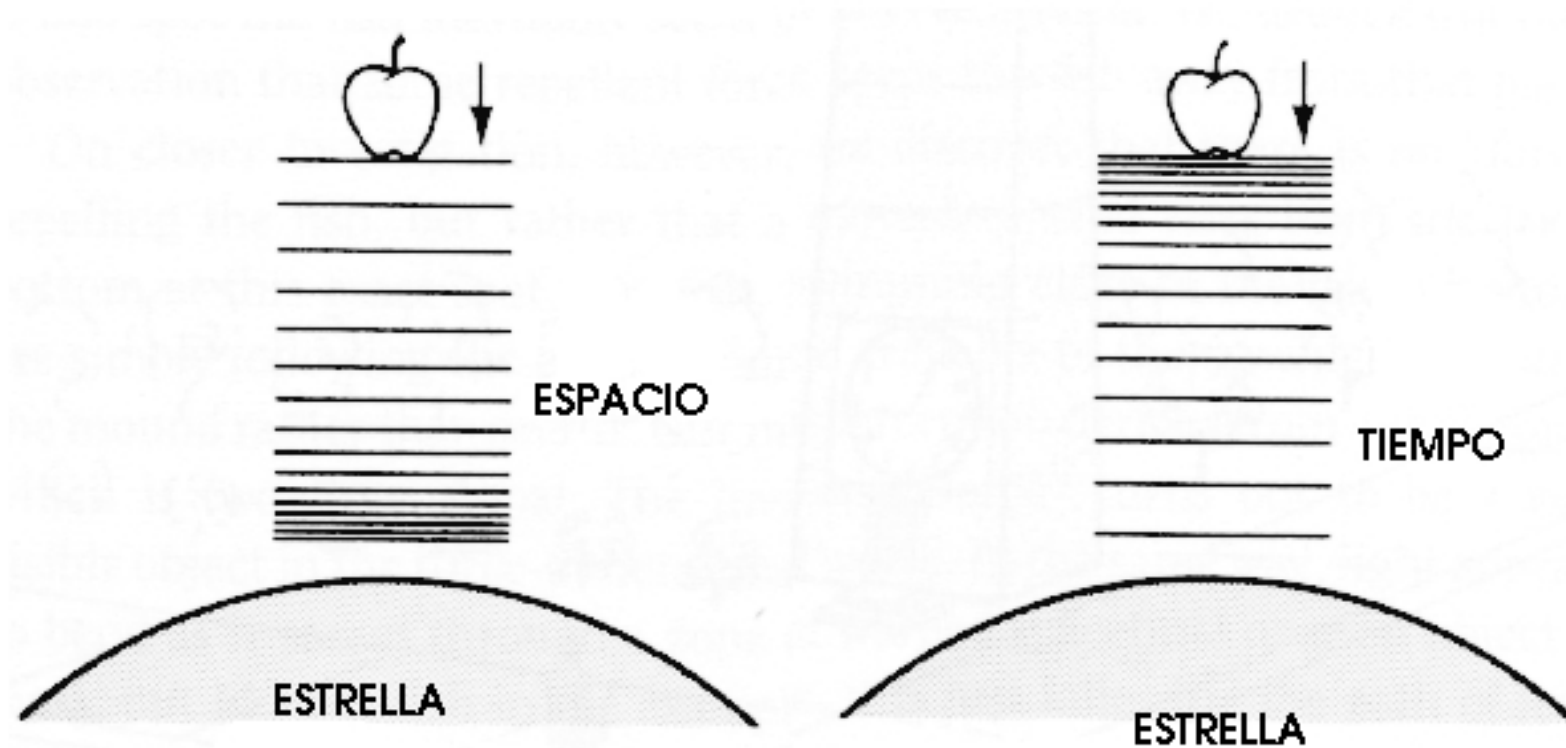
16 Cambio rojo gravitacional

- † La luz aumenta su longitud de onda al cruzar campos gravitacionales suficientemente fuertes.
- † Ej: radiación proveniente de una galaxia distante se vuelve más roja al pasar junto a un agujero negro.



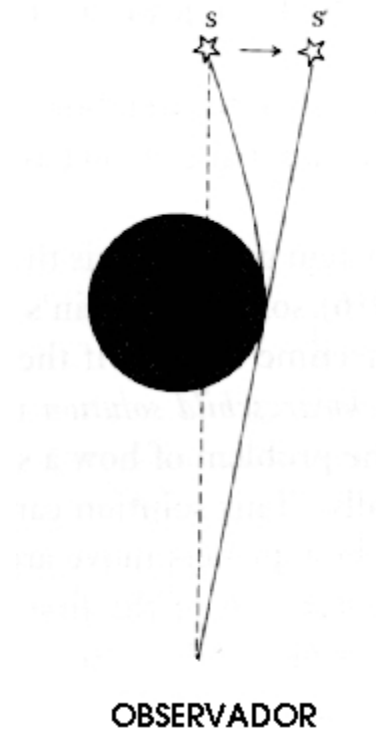
17 Dilación del tiempo y contracción del espacio

- † Los campos gravitacionales causan que los relojes cerca de estos caminen mas lento que los relojes lejanos a los mismos.
- † El espacio se compactifica cerca de campos gravitacionales.



18 Curvatura de rayos de luz

- † Los rayos de luz siguen **geodésicas** (trayectorias de mínima longitud) muy particulares. Al pasar a través de campos gravitacionales existe deflexión.
- † Experimento. Observar estrellas cercanas al sol durante un eclipse. Resultado: la estrella no aparece donde debería.



19 Bibliografía

† Para antes de dormir:

- * Landau, L.D. & Rumer, I.U.B., *What is Relativity?*, 1960, 1era edición, Ed. Basic Books (Traducción al castellano por Ed. Mir.
- * Landau, L.D. & Kitaigorodsky, A.I. *Physics for everyone*, 1980's, 4 tomos, Moscu, Ed Mir.
- * Asimov, I., *Understanding Physics*, 1967, 3 tomos, Ed. Allen & Unwin

† Para comenzar con relatividad:

- * Taylor, E.F. & Wheeler, J.A., *Spacetime Physics*, 1966, 1era edición, Ed. Freeman.

† Avanzados:

- * Landau, L.D. & Lifshitz, E.M., *The Classical Theory of Fields*, Course of Theoretical Physics, vol II, 1994, 4ta edición, Ed. Pergamon