

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	III
Prefacio	V
Copyright	VII
Agradecimientos	IX
I. Calculo vectorial	1
§1. Vectores	1
§2. Producto escalar	5
§3. Producto vectorial	7
§4. Sistemas coordenados	10
§5. Notación de Einstein	13
§6. Superficies de nivel	15
§7. Campos escalares y vectoriales	19
§8. Derivada	20
§9. Gradiente	25
§10. Integral de línea	28
§11. Integrales de área y volumen	30
§12. Teoremas de Gauss y Stokes	32
§13. Algunas aplicaciones de los teoremas de Gauss y Stokes	38
II. Mecánica de fluidos	41
§14. Fluidos	41
§15. Principio de Pascal	43
§16. Presión hidrostática	45
§17. Presión atmosférica	47
§18. Flotación. Principio de Arquímedes	49

§19. Formalismo	51
§20. Ecuación de continuidad	52
§21. Ecuación de Euler	53
§22. Hidrostática	57
§23. Teorema de Bernoulli	67
§24. Conservación de la circulación	72
§25. Fluidos irrotacionales	75
§26. Fluidos incompresibles	78
§27. Ondas sonoras	80
§28. Flujos supersónicos	85
§29. Cosmología Newtoniana	90
§30. Análisis dimensional	92
§31. Fluidos viscosos	99
Apéndice: GNU Free Documentation License	107
§32. Applicability and Definitions	107
§33. Verbatim Copying	108
§34. Copying in Quantity	109
§35. Modifications	109
§36. Combining Documents	111
§37. Collections of Documents	112
§38. Aggregation With Independent Works	112
§39. Translation	112
§40. Termination	112
§41. Future Revisions of This License	113

Índice de figuras

I.1.	Representación gráfica de un vector	2
I.2.	Suma de dos vectores	2
I.3.	Representación gráfica de un vector en un espacio euclidiano	3
I.4.	Significado geométrico de la resta de dos vectores	4
I.5.	Valor de un vector con respecto a dos sistemas de referencia rotados	6
I.6.	Funcionamiento de un tornillo	7
I.7.	Representación gráfica del producto vectorial	8
I.8.	Coordenadas polares	11
I.9.	Coordenadas cilíndricas	12
I.10.	Coordenadas esféricas	12
I.11.	Representación gráfica de una función de dos variables	16
I.12.	Interpretación el valor constante de una función de dos variables	17
I.13.	Superficies de nivel	18
I.14.	Campo vectorial	20
I.15.	Diagrama de densidad	21
I.16.	Diferencial de una función de una variable	23
I.17.	Integral de flujo	33
I.18.	Flujo sobre un cubo. Teorema de Gauss	34
I.19.	Circulación de un campo	36
I.20.	Circulación de un campo en una curva frontera.	36
I.21.	Circulación sobre un rectángulo pequeño	37
II.1.	Prensa hidráulica.	43
II.2.	Paradoja hidrostática.	46
II.3.	Flujo a través de una superficie infinitesimal	52
II.4.	Definición de ángulo	59
II.5.	Generalización de ángulo	60
II.6.	Definición de ángulo sólido	60
II.7.	Superficies de vorticidad	76

II.8. Línea de corriente en un tinaco	79
II.9. Movimiento de una pelota de baseball	80
II.10. Caricatura del efecto Doppler	85
II.11. Características y número de Mach	86
II.12. Acción capilar	101
II.13. Elemento de área sobre un círculo	105

Prefacio

Este documento fue escrito por Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx> y <sergio@cyberspace.org> (<http://www.astroscu.unam.mx/~sergio>).

Estas notas que yo escribí para el curso de Calor Ondas y Fluidos en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de México (UNAM) fueron hechas utilizando LaTeX-2e. La gran mayoría del software utilizado fue software libre (<http://www.gnu.org>) y Debian (<http://www.debian.org>), el sistema operativo de la Fundación de Software Libre GNU (<http://www.fsf.org>).

Diversas versiones de este documento (incluyendo las gráficas en colores y demás -si es que estás viendo este documento en blanco y negro) pueden encontrarse en <http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/cof>. Todo este documento es copyright ©Sergio Mendoza y está basado en las ideas de libertad de enseñanza y educación (ver la sección copyright).

Cualquier sugerencia y correcciones sobre las notas será bienvenida para su inclusión.

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

Instituto de Astronomía

Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria

Distrito Federal

México

Última Modificación: Mon May 20 21:44:45 UTC 2002

Copyright

Copyright © 2002 Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx> and <sergio@cyberspace.org> (<http://www.astroscu.unam.mx/~sergio>). Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, with no Front-Cover Texts, and with no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section (appendix) entitled “GNU Free Documentation License”.

For information about the Free Software Foundation visit: <http://www.fsf.org>. For information on GNU visit: <http://www.gnu.org>. The “GNU Free Documentation Licence” can be obtained in: <http://www.gnu.org/licenses/licenses.html#FDL>

This document is available for download in its original format in the following URL: <http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/cof>

Copyright © 2002 Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx> and <sergio@cyberspace.org>. (<http://www.astroscu.unam.mx/~sergio>). Se otorga permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los terminos de la Licencia de Documentación Libre GNU (GNU Free Documentation Licence), Versión 1.1 o cualquier otra versión publicada por la Fundación de Software Libre (Free Software Foundation); con no Secciones Invariantes (Invariant Sections), con no Textos de la Cubierta Frontal (Front-Cover Texts) y con no Textos de la Cubierta Trasera. Una copia de la licencia se incluye en la sección (apéndice) bajo el título “GNU Free Documentation Licence”.

Para información en la Free Software Foundation visitar: <http://www.fsf.org>. Para información en GNU visitar: <http://www.gnu.org>. La “GNU Free Documentation Licence” puede ser obtenida en: <http://www.gnu.org/licenses/licenses.html#FDL>

Este documento puede ser encontrado en su forma original en el siguiente URL: <http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/cof>

Agradecimientos

Siempre hay mucho que agradecer, pero quiero que esta sección se utilice para agradecer a la gente que ayude a contribuir al mejoramiento de estas notas. Así es que si alguien encuentra un error (por pequeño que sea) favor de avisarme y su nombre aparecerá aquí. A las personas que modifiquen este documento, les pido que agreguen sus nombres a la lista siguiendo el formato original y de todos aquellos que contribuyan en un futuro al mejoramiento del mismo.

† Sergio Mendosa (2002). → <sergio@astroscu.unam.mx> y <sergio@cyberspace.org>.

Url: <http://www.astroscu.unam.mx/~sergio> Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México. Creador original.

Agradesco a las siguientes personas por sus correcciones:

(i) Edward Daniel Reyes (2002). *Estudiante de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Dos correcciones tipográficas.*

*Dedicado a todos aquellos buscadores de la verdad,
manifestada en la naturaleza y que va más
allá de lo imaginable.*

Capítulo I

Calculo vectorial

El curso de Calor, Ondas y Fluidos (COF) es una introducción a la termodinámica, a las ondas y a la mecánica de fluidos o hidrodinámica como frecuentemente se le denomina. Las dos primeras partes del curso, termodinámica y ondas parecen bastante distantes entre si, pero es justamente con el estudio de la hidrodinámica donde veremos que los líquidos y gases poseen ciertas propiedades que al ser cambiadas un poco (perturbadas) estas mismas se propagan por todo el espacio a manera de ondas (ej: las ondas sonoras).

Para poder dar una descripción precisa al curso es necesario utilizar todas las herramientas matemáticas de cálculo que durante los dos primeros semestres de la carrera estudiaste. Tus cursos de álgebra, geometría y sobre todo el de mecánica te serán de gran utilidad para comprender las distintas propiedades que mas adelante del curso discutiremos en la sección de hidrodinámica.

Sin embargo, necesitamos un poco mas de herramienta matemática que aprenderás a lo largo del tercer y cuarto semestre sobre todo en tus cursos de cálculo. Evidentemente no es posible que nos esperemos tanto tiempo, así es que comenzaremos el curso por discutir las matemáticas necesarias para el mismo. Trataremos de mostrar al cálculo en el espacio euclidiano (cálculo vectorial) de una manera geométrica para que entiendas su significado. Las demostraciones excesivamente rigurosas y formales las dejaremos a tus maestros de cálculo. Recuerda que sobre todo importa mucho que tengas una rapidez excesiva para realizar tus cálculos matemáticos. Las demostraciones debes entenderlas y saber donde utilizar los teoremas necesarios. Pero no profundices excesivamente en demostraciones de tal forma que dejes a un lado la física. ¡Buena Suerte!

§1. Vectores

Antes que otra cosa vamos a repasar lo que ya aprendiste en de tus cursos de geometría: *vectores*. Un vector es una flecha en el espacio como la que se muestra en la fig.(I.1). Estas flechas tienen tamaño y dirección. El vector posición r , la velocidad v , la aceleración a y otros mas que ya has visto en el curso de mecánica son solamente algunos ejemplos. La manera de sumar dos vectores es mediante la



Figura I.1: Un vector es un objeto simple representado en el espacio mediante una flecha. La dirección del vector está representada mediante la punta de la flecha.

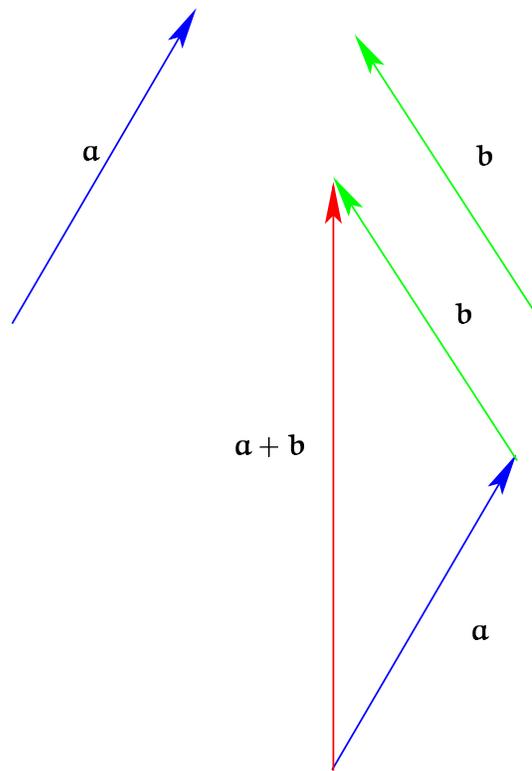


Figura I.2: Los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son sumados en $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ trasladando paralelamente al vector \mathbf{b} hasta que su cola quede en la punta de \mathbf{a} . El vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se muestra en la figura.

regla del triángulo[†]. Consideremos dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} como los que se muestran en la fig.(I.2). Decimos que la suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es un nuevo vector construido de la siguiente manera. Traslademos paralelamente el vector \mathbf{b} hacia la punta de la flecha de \mathbf{a} y unamos la cola del vector \mathbf{b} con la punta del vector \mathbf{a} . A este segmento lo direccionamos en el mismo sentido, es decir, ponemos una flechita a este segmento en la dirección de la cola de \mathbf{a} hacia la punta de \mathbf{b} .

En el espacio 3D Euclidiano pueden definirse los vectores de una manera analítica y algebraica. Dado un origen 0 y tres ejes mutuamente ortogonales que se intersectan entre si en 0 es posible escribir matemáticamente a un vector. Por ejemplo, si consideramos los ejes x , y , y z entonces de la fig.(I.3) y de la definición de suma para vectores se sigue que el vector \mathbf{a} puede escribirse como:

[†]En ocasiones cuando la gente desea gastar demasiada tinta (o los maestros gustan de utilizar demasiado gis en el pizarrón para hacer estornudar a sus estudiantes) realizan el proceso del triángulo para ambos vectores formando un paralelogramo. Por esta razón, en algunas ocasiones se le llama a esta regla, la *regla del paralelogramo*

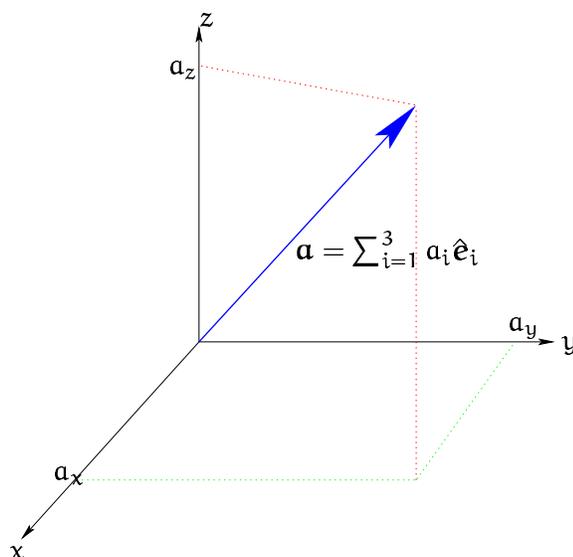


Figura I.3: Representación pictórica de un vector \mathbf{a} en un espacio Euclídeo. El vector fue trasladado paralelamente desde cualquier posición inicial hasta el origen 0 del sistema coordenado $0xyz$ que se muestra en la figura.

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y + a_z \hat{\mathbf{e}}_z = a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

en donde los vectores unitarios (vectores bases del espacio Euclídiano) en las distintas direcciones base del espacio Euclídiano están representados por $\hat{\mathbf{e}}_k$ ($k = 1, 2, 3$ o equivalentemente $k = x, y, z$)[†].

Cualquiera de las formas de escribir al vector \mathbf{a} mostradas en la ec.(1.1) es válida y tu puedes inventar tu propia manera (solamente que quizás no sería muy convencional y mas vale entonces que la especifiques antes de mostrársela a cualquier persona). La forma mas común de escribir vectores utilizando una máquina de escribir o una computadora mediante un lenguaje de programación de escritura como $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ o el mas moderno $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ es oscureciendo las letras (letras negritas) como por ejemplo \mathbf{A} en vez de una simple A . Existen otras muchas formas utilizadas al escribir en un papel, pizarrón y en ocasiones ciertos documentos. Por ejemplo: \vec{A} , \bar{A} , \underline{A} y hasta cosas tan complicadas como \mathbb{A} . Lo importante es que cada quien decida que símbolo utilizar y seguir una convención por siempre, hasta la tumba[‡]. Esto te dará identidad al escribir un documento. Por ejemplo, en el pizarrón yo escribiré a los vectores como \vec{A} y en estas notas como \mathbf{A} . Espero que tu también hagas lo mismo (para facilitar

[†]Los físicos acostumbran utilizar un gorrito ($\hat{\ }$) encima de los vectores unitarios. En lo sucesivo utilizaremos esta notación.

[‡]Si esto te parece ridículo, quizás te será importante saber que Stephen Hawking, renombrado astrofísico del Departamento de Matemáticas Aplicadas y Física Teórica de la Universidad de Cambridge del Reino Unido, al cumplir 60 años dijo que una de las cosas que mas deseaba era que en la lápida de su tumba se escribiera la relación entre masa y temperatura de un agujero negro descubierta por él en la década de los 70's.

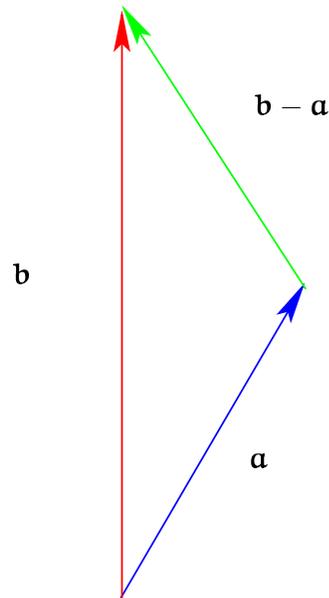


Figura I.4: Representación pictórica de la resta entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} . El vector resta $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es tal que al ser sumado con \mathbf{a} resulta en el vector \mathbf{b} .

el leer tus trabajos) pero si quieres utilizar otra notación, adelante, solamente especificala en todos tus trabajos. Los matemáticos suelen frecuentemente no poner nada para identificar a los vectores. Esto evidentemente puede ser muy confuso, así es que no utilizaremos esta notación. Los suficientemente tercos pueden hacerlo siempre y cuando especifiquen cuales son escalares y cuales son vectores en sus trabajos, de lo contrario habrá problemas serios...

Utilizando la ec.(1.1) y el diagrama de la fig.(I.3) resulta claro que la adición de dos vectores está dada en forma analítica por:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{k=1}^3 (a_k + b_k) \hat{\mathbf{e}}_k = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

La operación de resta de manera analítica es obvia de la ec.(1.2) y su significado geométrico es sencillo. El vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es un vector tal que al ser sumado con \mathbf{a} es igual a \mathbf{b} . Esto se representa pictóricamente en la fig.(I.4).

La siguiente operación a realizar con un vector es su multiplicación con un escalar. Por ejemplo, la operación $\lambda \mathbf{a}$ se define tal que el tamaño del vector λ se incrementa (o decrementa si $\lambda < 1$) λ veces con esta multiplicación. Si $\lambda < 0$ entonces como $\mathbf{a} - \mathbf{a}$ debe ser igual a cero, es claro que la multiplicación con λ 's negativos debe cambiar la dirección del vector. Dos vectores paralelos que apuntan en direcciones opuestas suelen denominarse *antiparalelos*.

El tamaño de un vector es una cantidad muy importante y se denomina *modulo* o *norma*. Existen

varias maneras de escribir la norma de un vector \mathbf{a} . Las mas comunes son a y $|\mathbf{a}|$ (esta última escrita a mano es: $|\vec{a}|$). Los matemáticos adoran gastar tinta en exceso y suelen utilizar dos barras para escribir la norma de un vector: $\|\mathbf{a}\|$.

De la fig.(1.3) y la ec.(1.1) es obvio que el modulo de un vector está dado por la siguiente relación:

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}. \quad (1.3)$$

§2. Producto escalar

El *producto escalar* o *producto punto* de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se define como el producto de los módulos de ambos, multiplicado por el coseno del ángulo que forman entre si. En otras palabras, este producto representa la proyección de cualesquiera de estos vectores sobre el otro (¡demuéstralo!). Es claro entonces que analíticamente el producto punto está dado por:

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = ab \cos \theta, \quad (2.1)$$

con θ el ángulo formado entre ambos vectores. El módulo de un vector es un caso particular del producto escalar, pues $a = \sqrt{a^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$. El producto escalar cumple con las siguientes propiedades necesarias para ser denominado producto:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La raíz cuadrada del cuadrado de un vector (la raíz cuadrada del producto escalar de este vector consigo mismo) es una distancia, y como tal esperamos que esta misma no cambie mediante transformaciones del sistema de referencia al cual se refiere este mismo. Generalmente hablando, uno espera que esta propiedad sea heredada para el producto escalar entre dos vectores. Dicho de otro modo, el producto escalar entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es una cantidad *invariante* o *escalar* ya que vale lo mismo para cualquier sistema coordenado.

Para mostrar que el producto escalar de dos vectores es un escalar consideremos una rotación hecha en el plano Oxy mediante un ángulo θ . Utilizando la fig.(1.5) se sigue que la relación entre los puntos (x, y, z) y los puntos (x', y', z') de un punto \mathbf{P} están relacionados mediante:

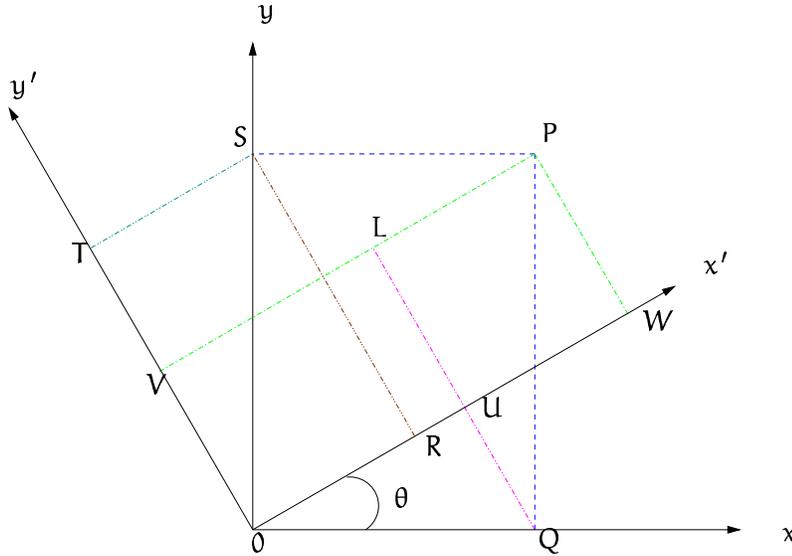


Figura I.5: Dos sistemas de referencia $0xyz$ y $0x'y'z'$ rotados con respecto al mismo origen se muestran en la figura. El punto P tiene coordenadas (x, y, z) con respecto al primer sistema y (x', y', z') con respecto al segundo. Debido a que los triángulos ORS y PQL son iguales se sigue que los segmentos $OU = x \cos \theta$ y $UW = y \sin \theta$. Utilizando estos resultados se obtiene que la coordenada x' del vector P en el sistema primado está dada por $x' = OW = x \cos \theta + y \sin \theta$. De manera análoga se sigue que la coordenada y' en este mismo sistema de referencia está dada por $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$.

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\z' &= z.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Consideremos primero la cantidad r^2 , donde $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i$ es el vector posición. Entonces el vector $\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}'_i$ en el sistema de referencia rotado $0x'y'z'$. De esta manera el cuadrado de la magnitud del vector \mathbf{r}' se puede escribir como $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$, mediante el uso de la ec.(2.3).

De esta manera, hemos mostrado que el módulo $r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$ de un vector cualquiera es una cantidad invariante ante rotaciones del espacio, es decir es un escalar. Esto debe ser claro, pues sabemos que una regla para medir distancias mide lo mismo desde cualquier posición en el espacio.

Utilizando el mismo argumento, es fácil ver que el producto escalar de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es un escalar como su mismo nombre lo indica.

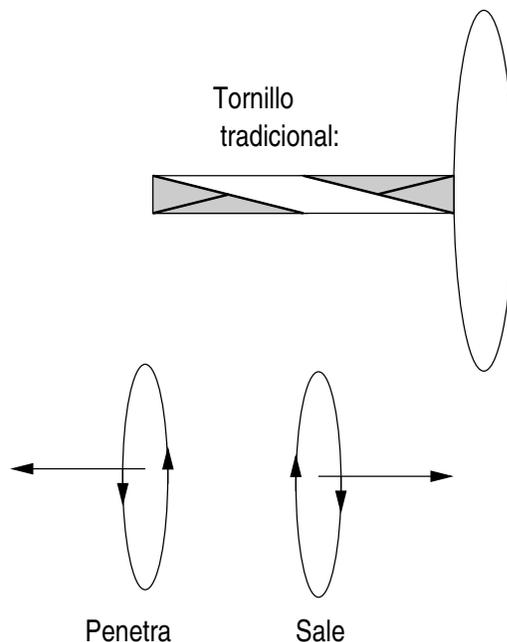


Figura I.6: La figura muestra el funcionamiento de los tornillos convencionales Si el tornillo se gira en sentido de las manecillas del reloj, este penetra a las paredes. Al girarlo en sentido contrario a las manecillas del reloj destornilla. Este comportamiento se hereda para la multiplicación vectorial entre dos vectores.

§3. Producto vectorial

El *producto vectorial* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ o *producto cruz* entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , que en ocasiones se escribe también como $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, se define de una manera muy curiosa y está basado en el funcionamiento de todos los tornillos existentes en el mundo. Todos hemos girado un abrelatas, atornillado un tornillo o destapado una botella de vino con un sacacorchos. En todo el mundo, los tornillos “normales” penetran o atornillan sobre una madera al girarse en un sentido convencional, como el que se muestra en la fig.(I.6). Esencialmente, si el tornillo se gira en sentido de las manecillas del reloj, este mismo atornilla. Si el tornillo se gira en contra de las manecillas del reloj, este mismo desatornilla.

El producto vectorial $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se define como el vector ortogonal a \mathbf{a} y \mathbf{b} cuya magnitud es igual al área formada por el paralelogramo formada por los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} . Ya que existen dos vectores ortogonales a \mathbf{a} y \mathbf{b} con esta propiedad –de hecho son antiparalelos entre si– entonces se escoge al vector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ de la siguiente manera. Pensemos que el producto vectorial entre los dos vectores originales es un tornillo convencional, el cual es girado en el sentido de rotación de \mathbf{a} hacia \mathbf{b} . La dirección de giro determinada de esta manera, por el tornillo universal es justamente la dirección del vector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Esto se muestra de manera pictórica en la fig.(I.7). De esta definición se sigue que:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = ab \sin \theta (\widehat{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}), \tag{3.1}$$

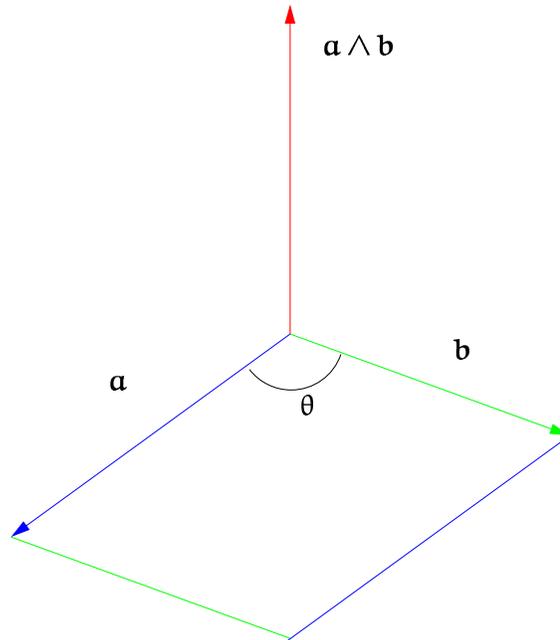


Figura I.7: El producto vectorial entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se define como el vector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ tal que su magnitud está dada por el área formada por el paralelograma que naturalmente forman \mathbf{a} y \mathbf{b} . El producto vectorial es además un vector ortogonal a \mathbf{a} y \mathbf{b} y apunta en la dirección de atornillaje de un tornillo convencional girado en el sentido de \mathbf{a} hacia \mathbf{b} como se muestra en la figura.

donde θ es el ángulo formado entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Es fácil encontrar una expresión analítica para el producto vectorial utilizando las ideas geométricas expuestas anteriormente. Basta con que observes que el producto vectorial cumple con la condición básica para ser denominado producto[†]:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \quad (3.3)$$

y que de acuerdo a la regla del tornillo convencional:

$$\hat{\mathbf{e}}_x \wedge \hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_z, \quad \hat{\mathbf{e}}_z \wedge \hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{e}}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_y \wedge \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (3.4)$$

De esta manera, como:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \sum_{p=1}^3 \sum_{r=1}^3 a_p b_r \hat{\mathbf{e}}_p \wedge \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (3.5)$$

utilizando la ec.(3.4) se sigue que:

[†]!Cuidado! El producto vectorial NO conmuta, es decir $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$. De hecho como ya lo habrás notado:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}. \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

A los amantes del cálculo sin sentido les fascina escribir al producto vectorial como un determinante, ¡el cual tu debes evadir cuanto mas puedas pues lo que mas importa es el significado geométrico mencionado anteriormente!:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

La manera mas inmediata de mezclar al producto vectorial y al producto escalar es mediante el *producto caja*. Este mismo está dado por:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (3.8)$$

La interpretación geométrica de este producto es la siguiente. La norma del producto $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ mide el área del paralelogramo formado por \mathbf{a} y \mathbf{b} . El producto escalar de la cantidad entre paréntesis en la ec.(3.8) y \mathbf{c} es la proyección de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ en la dirección de \mathbf{c} . En otras palabras, el producto caja mide el volumen del paralelepípedo formado por los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , y \mathbf{c} (todos aprendimos en la primaria que el volumen de un paralelepípedo está dado por la receta: área de la base por altura del paralelepípedo). Como la base del prisma pudo haberse considerado como el paralelogramo formado por \mathbf{b} y \mathbf{c} o bien \mathbf{a} y \mathbf{c} es claro entonces que:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}. \quad (3.9)$$

La siguiente operación que puede realizarse con los productos es la aplicación doble del producto vectorial que resulta en el *triple producto vectorial*:

$$\zeta \equiv \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}). \quad (3.10)$$

Antes de calcular este producto mostremos un pequeño resultado. Consideremos tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \hat{n} de tal manera que \mathbf{B} y \hat{n} son ortogonales entre sí. De esta manera $\lambda \equiv \mathbf{B} \wedge \hat{n}$ es un vector ortogonal a \mathbf{B} y \hat{n} de tamaño B . De esta manera, utilizando la ec.(3.9) se sigue que:

$$(\mathbf{A} \wedge \hat{n}) \cdot (\mathbf{B} \wedge \hat{n}) = (\mathbf{A} \wedge \hat{n}) \cdot \lambda = \mathbf{A} \cdot (\hat{n} \wedge \lambda) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.11)$$

Volvamos a la ec.(3.10) y definamos $\mathbf{p} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. Notemos ahora que ζ está contenido en el plano generado por los vectores \mathbf{b} y \mathbf{c} . En otras palabras, el vector ζ puede escribirse como una combinación

lineal de estos dos últimos:

$$\zeta = \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}, \quad (3.12)$$

y entonces multiplicando vectorialmente esta igualdad por \mathbf{c} se obtiene

$$\zeta \wedge \mathbf{c} = \beta (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}). \quad (3.13)$$

Multiplicando escalarmente esta igualdad por \mathbf{p} se obtiene:

$$\begin{aligned} \beta (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{p} &= \beta p^2 = (\zeta \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{p} \\ &= \{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{p}) \wedge \mathbf{c}\} \cdot \mathbf{p} \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como el vector \mathbf{p} es ortogonal a \mathbf{b} y a \mathbf{c} entonces utilizando el resultado de la ec.(3.11) se sigue que $p^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = p^2 \beta$, así $\beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$. De la misma manera se puede mostrar que $\gamma = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Así, el triple producto vectorial puede escribirse como:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (3.15)$$

La manera fácil de aprender este resultado es: *el triple producto vectorial es igual a la contracción de los extremos multiplicado por el de en medio menos la contracción de los medios multiplicado por el extremo.*

§4. Sistemas coordenados

Para resolver ciertos problemas con vectores es muy útil en diversas ocasiones utilizar no a las coordenadas x , y , y z sino que otras mas apropiadas de acuerdo a la simetría del problema. Por ejemplo, en dos dimensiones suelen utilizarse las famosas *coordenadas polares* o *circulares*. Si el vector $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y$ entonces de acuerdo a la fig.(I.8) se sigue que:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = r \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (4.1)$$

donde el vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_r$ apunta en dirección de \mathbf{r} .

Estas coordenadas se llaman circulares porque las líneas $r = \text{const}$ son círculos concéntricos en el origen. La generalización de estas coordenadas se puede llevar a 3D y se les conoce como *coordenadas cilíndricas* (ρ, φ, z) . La fig.(I.9) muestra pictóricamente la relación entre estas coordenadas y las

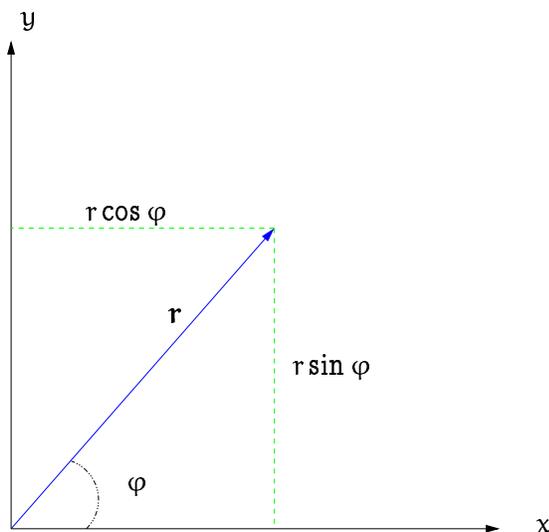


Figura I.8: Representación gráfica de las coordenadas polares: r y φ con respecto a las coordenadas x y y .

coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + z \hat{\mathbf{e}}_z, \tag{4.2}$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$ representa el modulo de la sombra del vector \mathbf{r} medida en el plano $0xy$.

Las coordenadas cilíndricas deben su nombre a que las superficies con $\rho = \text{const}$ representan cilindros concéntricos de radio ρ con ejes que coinciden con el eje z . El ángulo φ se conoce como *ángulo azimutal* es tal que $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Por último, los problemas de la física que se suelen tratar frecuentemente son aquellos que poseen simetría esférica (piensa en isotropía y homogeneidad). De esta manera, las coordenadas utilizadas para este caso son las llamadas *coordenadas esféricas* (r, θ, φ) . La fig.(I.10) muestra de manera gráfica que la relación entre las coordenadas cartesianas y las esféricas están dadas por:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = r \hat{\mathbf{e}}_r, \tag{4.3}$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_r$ es un vector unitario en la dirección radial \mathbf{r} .

Las coordenadas esféricas deben su nombre a que las superficies formadas con $r = \text{const}$ son esferas concéntricas, centradas en el origen de coordenadas. El ángulo θ se denomina frecuentemente como el *ángulo polar*. Su variación es tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

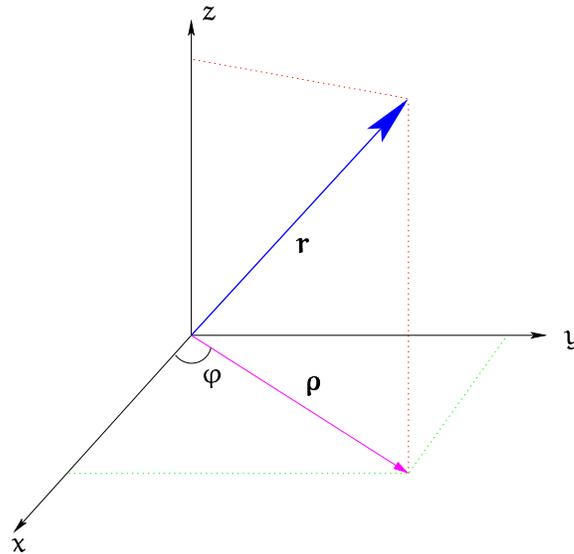


Figura I.9: Las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) se muestran esquemáticamente en la figura como función de las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un vector \mathbf{r} .

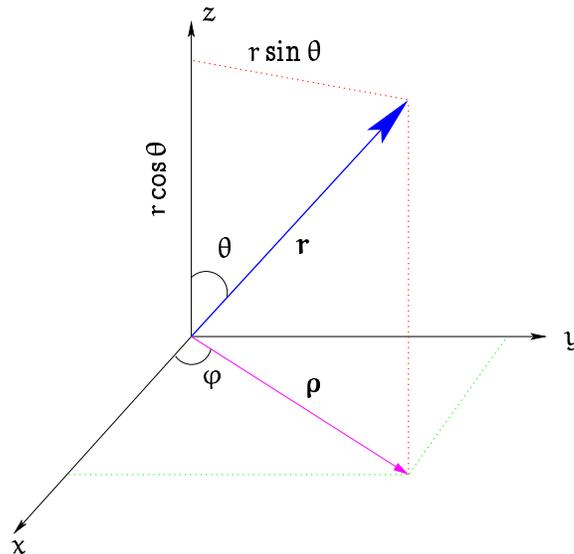


Figura I.10: Las coordenadas esféricas (r, θ, φ) se muestran esquemáticamente en la figura como función de las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un vector \mathbf{r} .

§5. Notación de Einstein

Hasta ahora hemos hablado de vectores de una manera bastante geométrica y hemos evitado el hacer demostraciones analíticas que solamente confunden y no permiten observar la geometría involucrada en las soluciones. Sin embargo, no siempre es posible hacer esto y en sobradas ocasiones es necesario realizar todos los cálculos algebraicos para llegar a ciertos resultados. En tus cursos de geometría analítica ya habrás hecho esto en infinidad de ocasiones y como te has dado cuenta, el álgebra puede ser bastante extensa.

Para facilitar la escritura de expresiones que pueden ser excesivamente grandes, Einstein inventó una notación que es bastante conveniente y se denomina *notación de Einstein* o *notación de suma implícita*. Esta consiste en que al escribir por ejemplo a un vector $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i$ lo que hacemos es eliminar el signo de suma y dejamos a nuestra imaginación el mismo signo de suma, con la convención de que: dos índices repetidos, y solamente dos, significa que hay que sumarlos. De hecho, si en tus ecuaciones aparecen mas de dos índices repetidos, algo está mal. Así, el vector \mathbf{a} puede escribirse como $\mathbf{a} = a_p \hat{e}_p$ en esta notación.

La forma algebraica formal que utilizamos en física para designar a un vector es la siguiente. Un vector es un conjunto ordenado de tres números a_i ($i = 1, 2, 3$) los cuales se denominan por $\mathbf{a} = a_\alpha \hat{e}_\alpha$. Aquí estamos utilizando la convención introducida por Einstein en la cuál dos subíndices (o superíndices) que aparecen juntos en una operación matemática implica sumatoria. Desde ahora y en lo que resta del curso los índices $h, i, j, \dots, \alpha, \beta, \gamma$, etc. toman valores 1, 2, 3. Los vectores \hat{e}_α son vectores unitarios en las direcciones x, y, z , o si se prefiere en las direcciones 1, 2, 3. Así pues el vector $\mathbf{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3$.

El *producto escalar* de dos vectores es evidentemente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_\alpha \hat{e}_\alpha) \cdot (b_\beta \hat{e}_\beta) \\ &= a_\alpha b_\beta \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta \\ &= a_\alpha b_\beta \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde la *delta de Kronecker* $\delta_{\alpha\beta}$, o el *tensor[†] unitario de rango 2* es un objeto de 9 cantidades definidas por $\delta_{\alpha\beta} \equiv 1$ si $\alpha = \beta$ y $\delta_{\alpha\beta} \equiv 0$ si $\alpha \neq \beta$.

El *producto vectorial* de dos vectores es:

[†]Por el momento y en lo que resta del curso solo basta con que entiendas que tensor es un objeto con distintas cantidades ordenadas (un vector es un objeto con tres cantidades ordenadas) de cierta manera, las cuales sirven para hacer álgebra de manera simple. En tus cursos de relatividad general y de geometría diferencial aprenderás que significado geométrico tiene un tensor.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha) \wedge (b_\beta \hat{\mathbf{e}}_\beta) \\
&= a_\alpha b_\beta \hat{\mathbf{e}}_\alpha \wedge \hat{\mathbf{e}}_\beta \\
&= a_\alpha b_\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\mathbf{e}}_\gamma,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

en donde el *tensor unitario completamente antisimétrico* de rango 3, o tensor de Levi-Civita, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es un objeto de 27 cantidades. Este tensor es tal que sus componentes cambian signo ante cualquier intercambio de cualquier par de índices. Además, las componentes no nulas del mismo son ± 1 . Gracias a su antisimetría las componentes en las cuales aparezcan dos índices repetidos son nulas. En otras palabras, las componentes no nulas son aquellas que poseen todos sus índices diferentes. Es costumbre definir:

$$\epsilon_{123} = +1. \tag{5.3}$$

De esta manera los valores de $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ son $+1$ o -1 si los números α, β, γ pueden ser llevados al arreglo 1, 2, 3 por un número par o impar de permutaciones respectivamente. Evidentemente el número de todas las posibles permutaciones es $3!$ En otras palabras:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 3! \tag{5.4}$$

En realidad el tensor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ no es un tensor. Es un *pseudotensor* pues sus componentes se comportan como las de un tensor al hacer una rotación del sistema coordinado. Sin embargo al hacer un cambio de signo en una o tres de las coordenadas (una reflexión), algunas de las componentes de este tensor deberían cambiar. No obstante, estas componentes también quedan iguales ya que el tensor se definió como el mismo en todos los sistemas coordinados. Los pseudotensores de cualquier rango (incluso los de rango 0 que son *pseudoescalares*) se comportan como tensores bajo todas las transformaciones de coordenadas, excepto aquellas que no pueden ser reducidas a rotaciones. Es decir, bajo reflexiones.

Puede mostrarse que $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\nu}$ es un tensor verdadero (es decir, no es pseudotensor) de rango 8. Si se contrae uno o mas índices, entonces se obtiene tensores de rango 6, 4 y 2. Obviamente todos estos tensores tienen la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. Debido a esto, y ya que el valor de estos tensores es ± 1 para cada una de sus componentes, estos mismos deben de poder expresarse como productos de $\delta_{\alpha\beta}$. En otras palabras:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\beta\gamma} = 2! \delta_{\alpha\lambda}, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\gamma} = 1! \det \begin{bmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} \end{bmatrix}, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\nu} = 0! \det \begin{bmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Como ya mencionamos anteriormente, es costumbre abusar del lenguaje y llamar vector al escalar

a_α y tensor al escalar $\Pi_{\alpha\beta\gamma\omega}$ ya que, teniendo en mente que los índices varían conforme a lo dicho anteriormente, estos mismos dan razón de ser al vector o al tensor al variar sus índices. Así pues, uno se refiere al vector \mathbf{a} como a_k únicamente.

Para que te quede claro lo fácil que es trabajar con la notación de Einstein, mostremos la ec.(3.9):

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (a_i \hat{\mathbf{e}}_i \wedge b_k \hat{\mathbf{e}}_k) \cdot (c_m \hat{\mathbf{e}}_m) \\ &= a_i b_k c_m (\hat{\mathbf{e}}_i \wedge \hat{\mathbf{e}}_k) \cdot \hat{\mathbf{e}}_m \\ &= a_i b_k c_m \epsilon_{ikl} \hat{\mathbf{e}}_l \cdot \hat{\mathbf{e}}_m \\ &= a_i b_k c_m \epsilon_{ikl} \delta_{lm} \\ &= a_i b_k c_m \epsilon_{ikm}\end{aligned}$$

y como $\epsilon_{ikm} = -\epsilon_{kim} = \epsilon_{kmi}$ entonces:

$$\begin{aligned}&= a_i b_k c_m \epsilon_{kmi} \\ &= a_i b_k c_m \epsilon_{kml} \delta_{li} \\ &= a_i b_k c_m \epsilon_{mkl} (\hat{\mathbf{e}}_l \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) \\ &= a_i b_k c_m (\hat{\mathbf{e}}_k \wedge \hat{\mathbf{e}}_m) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= (a_i \hat{\mathbf{e}}_i) \cdot (b_k \hat{\mathbf{e}}_k \wedge c_m \hat{\mathbf{e}}_m) \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\end{aligned}$$

(5.6)

Tarea 1

Utilizando notación de Einstein, demostrar la identidad del triple producto vectorial de la ec.(3.15).

§6. Superficies de nivel

En el espacio de tres dimensiones existen tres tipos de figuras geométricas: (a) Puntos representados por \mathbf{p} y tres coordenadas x , y , z . (b) Líneas representadas por un solo parámetro, como por ejemplo el vector posición que describe la trayectoria de un automóvil $\mathbf{r}(t)$ como función del tiempo t . (c) Superficies abiertas y cerradas $\mathbf{S}(\lambda, \mu)$ parametrizadas por dos parámetros λ y μ . (d) Volúmenes $\mathbb{V}(\lambda, \mu, \nu)$ parametrizados por λ , μ y ν .

De la misma manera en la que se dibuja una función $f(t)$ en una superficie de dos dimensiones –plano Euclidiano $f(t)$ vs t – es posible dibujar una función $F(x, y)$ en el espacio de tres dimensiones con ejes: x , y y $F(x, y)$. El resultado es una superficie como la que se muestra en la fig.(I.11). Esta es

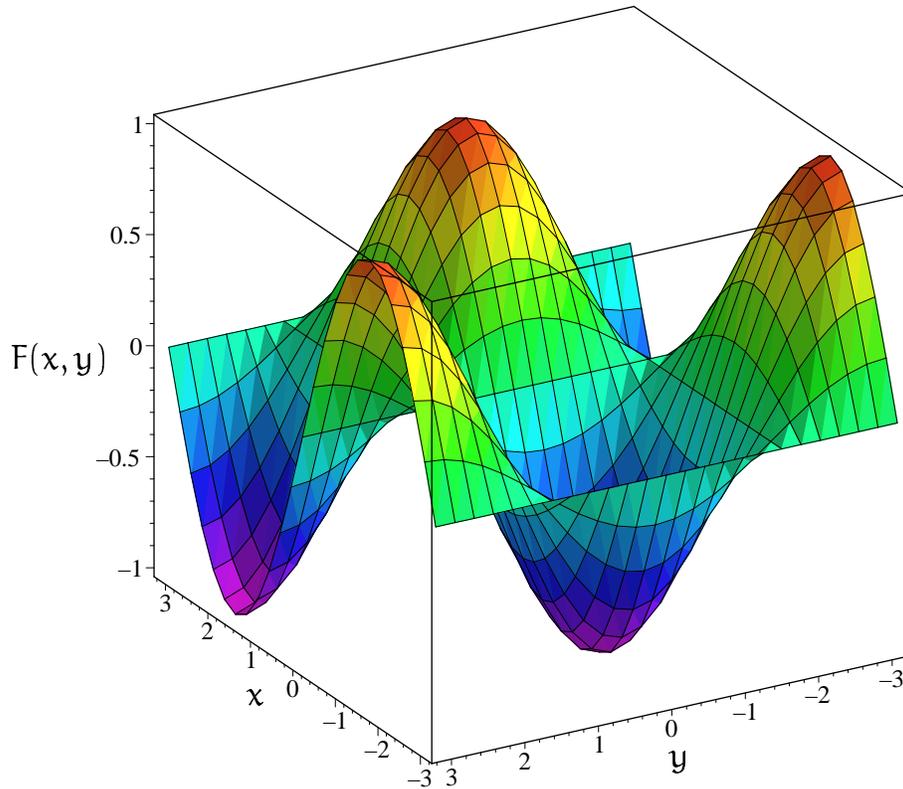


Figura I.11: Representación gráfica de la función $F(x, y) = \sin(x + y)$. A cada pareja de números x y y se le asigna un valor en el eje z del espacio Euclidiano de tres dimensiones dado por el valor de la función $F(x, y)$.

la forma de dibujar una función de dos variables $f(x, y)$. Es decir, es necesario utilizar un espacio de tres dimensiones para hacerlo. En el caso de una función de tres variables $f(x, y, z)$ es necesario utilizar un espacio de cuatro dimensiones para visualizarla. No hay forma de hacer esto, pero se pueden tomar varios cortes para esto, es decir, es posible graficar en tres dimensiones $f(x, y)$ y separadamente $f(y, z)$ y finalmente $f(x, z)$.

Uno de los ejemplos más sencillos de una función de dos variables es el utilizado por los cartógrafos al hacer mapas. En efecto, la superficie de la tierra por ser una esfera 2D (de dos dimensiones) es posible aproximarla por un plano localmente[†]. Así, alrededor de un punto dado en la superficie de la tierra uno puede medir la altura sobre el nivel del mar. Esta altura $F(x, y)$ es una función que depende de las coordenadas x y y . Para encontrar las alturas sobre el nivel del mar de igual valor, basta con hacer $F(x, y) = \text{const}$. Esto equivale tomar una rebanada de la fig.(I.11) de manera paralela al plano Oxy . Dicho de otro modo, las superficies de igual altura corresponden a la intersección del plano $F(x, y) = \text{const}$ (que es paralelo al plano Oxy) con la función $F(x, y)$ tal como se muestra en la fig.(I.12).

[†]Debe ser claro para todos que la tierra localmente se aproxima a un plano. ¡Observa tu alrededor! Los matemáticos llaman *superficie suave* a toda superficie que puede aproximarse localmente como un plano. Como te imaginas, esto implica que es posible derivar a la función, a través de este *plano tangente*.

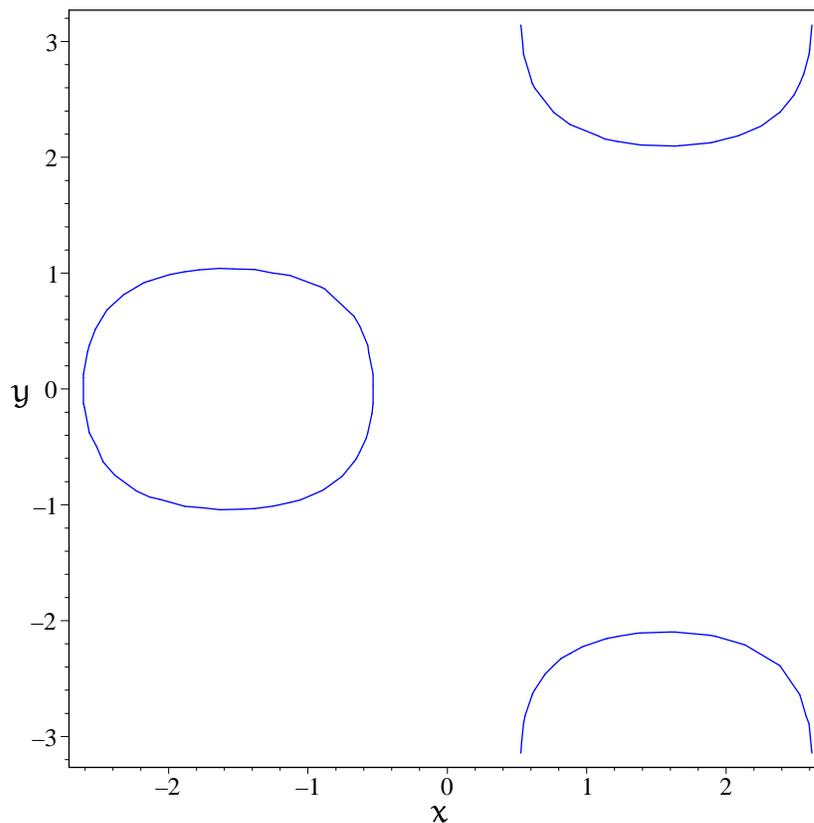
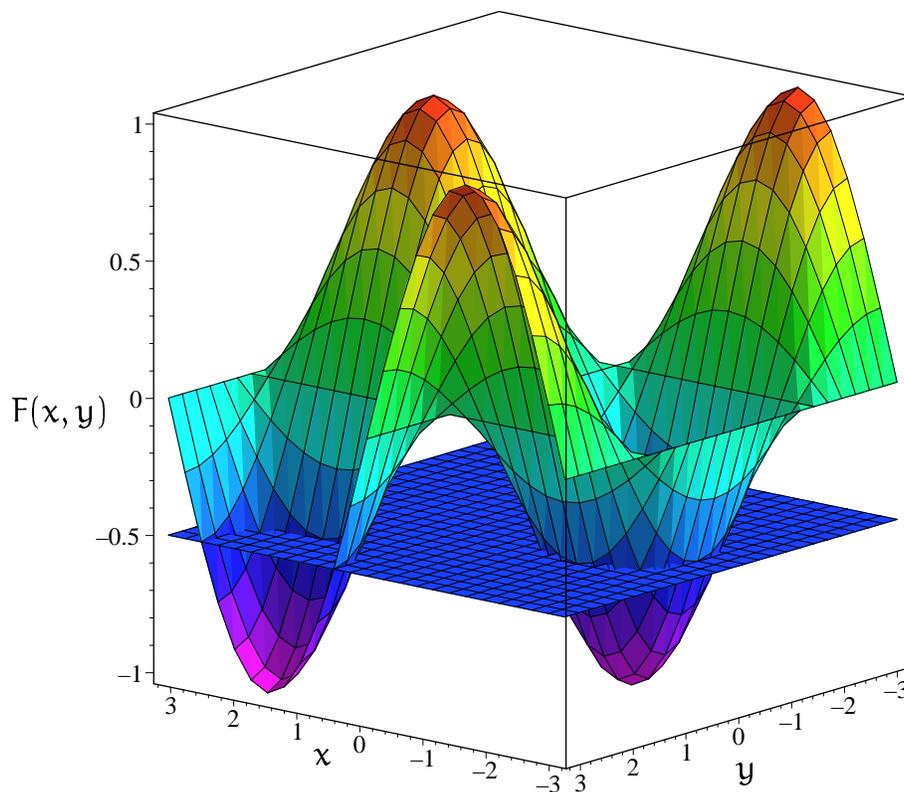


Figura I.12: En la gráfica superior se muestra a la función $F(x, y) = \sin(x + y)$ de la fig.(I.11), intersectándose con el plano $F(x, y) = -0.5$. El resultado de esta intersección se muestra en gráfica inferior. En otras palabras, el considerar $F(x, y) = \sin(x + y) = \text{const} = -0.5$ es lo mismo que rebanar a la función $F(x, y)$ en la “altura” con valor igual a -0.5 como se muestra en la gráfica superior. Así, la gráfica inferior muestra las curvas de igual altura en el plano $0xy$.

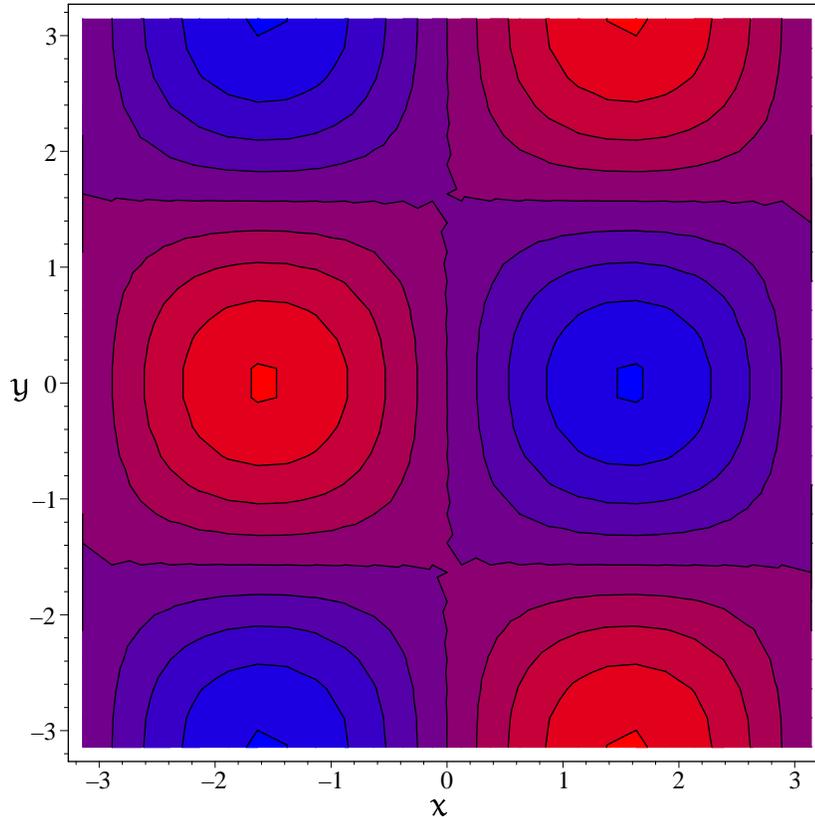


Figura I.13: La figura muestra algunas de las superficies de nivel de la función $F(x, y) = \sin(x + y)$ de la fig.(I.11) para valores $F(x, y) = -1, -0.75, -0.5, \dots, 0, \dots, 0.75, 1$. De izquierda a derecha los paneles muestran lo siguiente. Recuadro superior: “montaña” (máximo de la función $F(x, y)$), “valle” (mínimo de la función $F(x, y)$). Panel intermedio: valle y montaña. Panel inferior: montaña y valle. Los colores hacia el azul representan máximos y hacia el rojo mínimos.

Una de las maneras más comunes de representar a una función de dos variables $\Lambda(\eta, \mu)$ en el plano $O\eta\mu$, es mediante el uso de *superficies de nivel*. Las superficies de nivel son las proyecciones o sombras que la función $\Lambda(\eta, \mu)$ hace con el plano $O\eta\mu$. Formalmente las superficies de nivel son los contornos o líneas que forma la intersección de los planos $\Lambda(\eta, \mu) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ con la superficie $\Lambda(\eta, \mu)$.

Si en alguna ocasión has utilizado los famosos mapas topográficos (cartografías) del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (*INEGI*), te habrás fijado que las montañas y valles se encuentran dados por aglomeraciones de líneas cerradas que convergen hacia un punto. Si consideramos este mapa como el plano de la tierra en una vecindad local con coordenadas η y μ , y la función $\Lambda(\eta, \mu)$ representa la altitud con respecto al nivel del mar, entonces las intersecciones de los planos $\Lambda = \text{const}$ (alturas fijas) con la función $\Lambda(\eta, \mu)$ (las montañas) y proyectadas en el mapa del INEGI representan los contornos de igual altitud. La fig.(I.13) muestra un ejemplo de superficies de nivel. En ocasiones estas superficies de nivel suelen llamarse *isocontornos* pues representan contornos de igual valor de la función a la que se refieren.

§7. Campos escalares y vectoriales

La temperatura de tu recámara es una función T que varía con respecto a los distintos puntos del cuarto. Durante la noche esta temperatura disminuye a medida que nos acercamos a la ventana y aumenta debajo de las cobijas de la cama. Las corrientes de aire que pasan por debajo de las puertas hacen que el suelo sea un lugar frío e incomodo para dormir. De esta manera, al poner el origen de coordenadas en una de las esquinas de las paredes de la recámara de dormir, y de aquí trazar tres ejes mutuamente ortogonales entre sí siguiendo la forma de las paredes[†], la temperatura $T(x, y, z)$ resulta ser una función de las coordenadas x , y , y z definidas por estos ejes. El conjunto de todos los valores de la temperatura T para cada uno de los puntos (x, y, z) se denomina *campo* de temperatura. Debido a que la temperatura es una función escalar, el campo se denomina *campo escalar*.

Por otra parte consideremos agua que fluye en un río. En cada punto del río la velocidad del agua v fluye con velocidad diferente. Sobre las fronteras del río, el agua fluye mas lento que lejos de las mismas. En una piedra, la velocidad del agua cambia de dirección, en un ojo de agua el agua fluye rápidamente, pero la dirección de los vectores de velocidad apuntan hacia fuera del ojo de agua. Por el contrario, en un pozo cerca del río los vectores velocidad apuntan hacia dentro del pozo. Así, la velocidad $v(x, y, z)$ es una función de la posición. No solamente la magnitud de la misma varía de punto en punto, sino que varía también su dirección. Al conjunto de todos los valores de la velocidad v para cada uno de los puntos (x, y, z) se le denomina *campo* de velocidades. Debido a que la velocidad es una función vectorial, el campo se denomina *campo vectorial*.

Los fenómenos físicos presentan variaciones con respecto al tiempo y de aquí resulta que los campos de manera general no dependen únicamente de la posición espacial, sino que también presentan una variación con respecto al tiempo t . De esta manera, podemos decir que la temperatura $T = T(\mathbf{r}, t)$ y la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, donde $\mathbf{r} = x_i \hat{e}_i$ representa al vector posición (suma implícita).

Como mencionamos antes, es imposible dibujar una función que depende de tres variables o más como en un espacio de tres dimensiones. ¡Ni pensarlo para $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$! Es por esto que frecuentemente suelen pintarse los isocontornos correspondientes a, digamos $T(x, y, z, t)$ para $t = \text{const}$ en un espacio de tres dimensiones. Los isocontornos correspondientes a $T(x, y, z) = \text{const}$ para un tiempo dado t_0 pueden ser puntos, líneas (abiertas y cerradas), superficies (abiertas y cerradas) y volúmenes. En el caso de un campo vectorial, como la velocidad $\mathbf{v}(x, y, z)$, lo que se hace es dibujar algunos vectores \mathbf{v} en ciertos puntos del espacio de tres dimensiones. Evidentemente, eso en ocasiones es complicado y lo que uno hace es dibujar en un plano. Esto es muy válido cuando el problema posee la misma descripción sin importar a que altura del eje z se le observe. Por ejemplo, el agua dentro de un cilindro en rotación lenta se comporta de la misma manera sin importar a que altura del cilindro se haga un corte. Esta simetría se denomina *cilíndrica*. La fig.(I.14) muestra un ejemplo de como dibujar un campo vectorial en un plano.

[†] Aquellos que tienen cuartos en forma de pentágonos, hexágonos y círculos vayan en busca de una recámara convencional de forma rectangular.

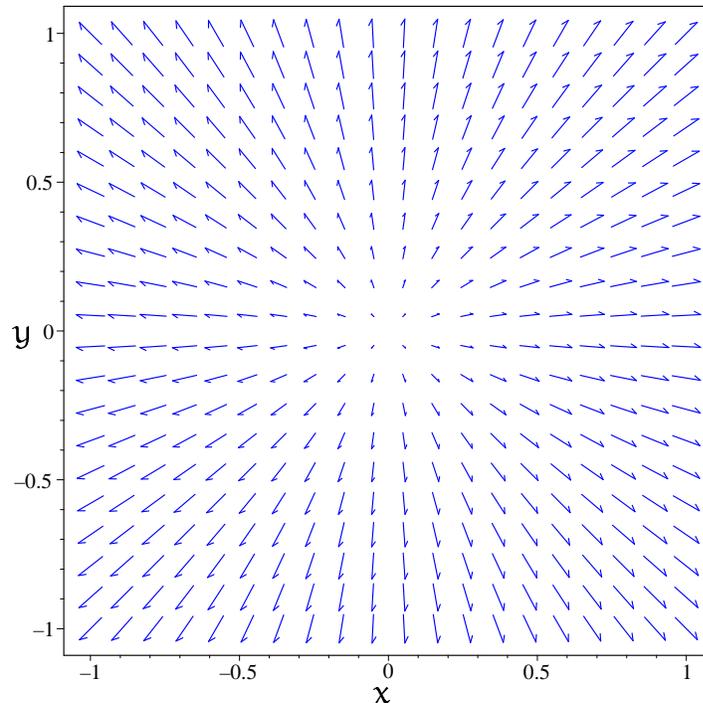


Figura I.14: Representación gráfica de un campo vectorial de velocidades v . Este es el ejemplo más simple que existe de una *fente*, pues un fluido es inyectado en el origen.

Otra manera de representar a una función de dos o tres variables es mediante el uso de *diagramas de densidad*. Estos diagramas son equivalente a los isocontornos, pero en lugar de utilizar curvas, se utilizan colores (grises) para dibujarlos. La fig.(I.15) muestra un ejemplo de diagrama de densidad.

§8. Derivada

El vector posición $\mathbf{r}(t)$ que tanto utilizaste en mecánica para describir la trayectoria de cuerpos celestes, o de automóviles en una carretera, o de arañas moviéndose en los vidrios de una casa vieja, etc. es uno de los ejemplos más útiles para comenzar nuestra discusión con respecto a derivadas de funciones en el espacio de tres dimensiones Euclidiano. Consideremos la trayectoria de una partícula y a dos tiempo distintos t_1 y t_2 , midamos las posiciones marcadas por los radios vectores correspondientes \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 respectivamente. La diferencia $\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es un vector cuya punta se encuentra en la cabeza de \mathbf{r}_1 y cuya cabeza está sobre la flecha de \mathbf{r}_2 . Decimos que la velocidad (la tasa de cambio del radio vector con respecto al tiempo) es la derivada del radio vector con respecto al tiempo, es decir,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (8.1)$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$ es el intervalo de tiempo. Debido a que $\mathbf{r}(t) = x_k(t)\hat{\mathbf{e}}_k$ (¡suma implícita!) entonces la ec.(8.1) toma la forma:

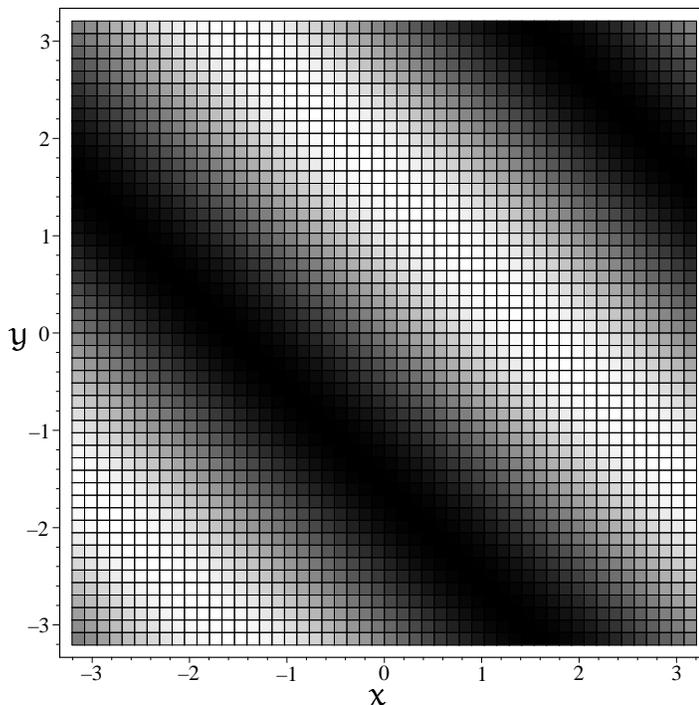


Figura I.15: El diagrama de densidad de la función $F(x, y) = \sin(x + y)$ de la fig.(I.11) se muestra en la figura.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta x_k(t) \hat{\mathbf{e}}_k}{\Delta t} \right\} = \hat{\mathbf{e}}_k \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta x_k(t)}{\Delta t} \right\} = \frac{dx_k}{dt} \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (8.2)$$

en donde hemos escrito $\Delta x_k \equiv x_k(t = t_2) - x_k(t = t_1)$ y hemos utilizado el hecho de que los vectores base $\hat{\mathbf{e}}_k$ no varían con respecto al tiempo ($d\hat{\mathbf{e}}_k/dt = 0$)[†]. Así pues, el derivar a un vector corresponde calcular las derivadas de cada una de sus componentes y sustituirlas en al ec.(8.2). Debido a que $\Delta \mathbf{r}$ es un vector que va desde \mathbf{r}_1 hasta \mathbf{r}_2 es claro que en el límite, cuando \mathbf{r}_2 tiende a \mathbf{r}_1 , es decir cuando Δt tiende a cero, el vector $\Delta \mathbf{r}$ es tangente a la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ en el punto t_1 . De aquí que la velocidad de una partícula sea tangente a la trayectoria.

Consideremos ahora un campo escalar $T(x, y, z)$ como la temperatura. ¿Qué tipo de derivadas podemos hacer con esta función de tres variables? Una de las cosas que sí sabemos hacer es derivar a una función de una variable, como $f(x)$. Entonces si en la función $T(x, y, z)$ dejamos fijos a y y z , es decir $y = \text{const}$ y $z = \text{const}$, entonces la función T depende únicamente de una sola variable x . Formalmente, esto puede ser escrito como:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \equiv \left. \frac{dT}{dx} \right|_{y, z = \text{const}}. \quad (8.3)$$

[†]De hecho, otra manera de hacer lo mismo sin tanta formalidad es utilizando el hecho de que $d\mathbf{r}/dt = (dx_k \hat{\mathbf{e}}_k)/dt = \hat{\mathbf{e}}_k(dx_k/dt)$.

La derivada $\partial T/\partial x$ así definida se denomina *derivada parcial* de la función T con respecto a x . Una manera un poco redundante pero obvia en termodinámica es especificar que cantidades se han dejado constantes en la diferenciación. Por ejemplo, $(\partial T/\partial p)_{s,V}$ representa la derivada parcial de la temperatura con respecto a la presión p dejando fijas o constantes a la entropía s y al volumen V . Sin embargo, esta notación se utiliza únicamente cuando existe riesgo de confusión, pues por ejemplo, a la temperatura T podría ser función de la energía interna e , la presión y el volumen, etc.

Evidentemente, en el caso mas general cuando una función $T = T(x, y, z, t)$, donde t es el tiempo, es posible definir derivadas parciales $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$, $\partial T/\partial t$. El significado de estas derivadas es claro. La derivada parcial de la temperatura con respecto a x , y , o z representa el cambio de la función T a medida que nos movemos en las direcciones x , y , o z respectivamente. En el caso de la derivada con respecto al tiempo esta es la forma en la que cambia la la función T como función del tiempo en un mismo lugar del espacio. Esto último lo puedes pensar como la variación en temperatura que tiene la ventana de tu cuarto con respecto a la mañana y la noche.

Las derivadas parciales de orden superior pueden se definen de manera natural

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x \partial y} &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y \partial x} &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^3 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y \partial x^2} &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^3 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y \partial x \partial z} &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x \partial z} \right).\end{aligned}\tag{8.4}$$

Resulta además que las funciones bien comportadas (funciones cuyas derivadas existen y son continuas) cumplen con la propiedad de conmutatividad en sus derivadas. En otras palabras, si $\Psi(\mathbf{r}, t)$ es una función suficientemente decente, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^3 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x \partial y \partial t} &= \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y \partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t \partial x \partial y}\end{aligned}\tag{8.5}$$

La razón por la que esta propiedad es válida para las derivadas parciales de funciones decentes tiene que ver con el concepto de límite y sus propiedades. Las derivadas (con respecto a x y a y por ejemplo) son límites. De esta manera,

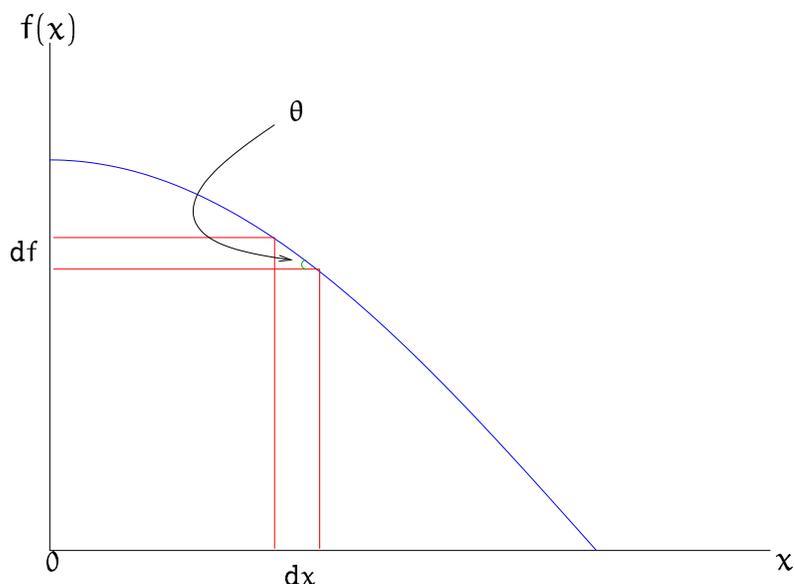


Figura I.16: La diferencial df de una función $f(x)$ de una variable se muestra en la figura. Básicamente la diferencial consiste en tomar un pedacito de la función $f(x)$ comprendido en el intervalo δx .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \left\{ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \right\} \right], \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]}{\Delta x \Delta y} \right\}, \end{aligned}$$

y como la función es suficientemente descende para que los límites existan, entonces

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]}{\Delta x \Delta y} \right\}, \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta y} \left\{ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right\} \right], \\ &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Dicho de otra forma, al derivar parcialmente a una función suficientemente decente varias veces, con respecto a $a, b, \dots e$ es lo mismo que derivarla con respecto a $b, a, \dots e$ o lo mismo que derivarla con respecto a $a, e, \dots b$, etc. “¡El orden de las derivadas parciales no altera el resultado!”.

La *diferencial* df de una función $f(x)$ en una dimensión se define como el incremento total de la función en un intervalo dx . Utilizando el hecho de que la línea tangente a la curva en el punto $f(x)$ está dada por $\tan \theta = df/dx$, en donde θ es el ángulo que forma la línea tangente con el eje x , se sigue entonces que $dx \tan \theta = df$, según la fig.(I.16). De aquí que $dx(df/dx) = df$.

En el caso de funciones de dos variables o mas puede también calcularse la diferencial total de la función que está dada por:

$$\begin{aligned} df &\equiv f(x + dx, y + dy) - f(x, y), \\ &= \{f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy)\} + \{f(x, y + dy) - f(x, y)\}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Sin embargo $f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy) \approx (\partial f/\partial x) dx$, donde la derivada parcial está evaluada en $(x, y + dy)$ y también $f(x, y + dy) - f(x, y) \approx (\partial f/\partial y) dy$, estando la derivada parcial evaluada en (x, y) . Cuando dx y dy tienden a cero se tiene en términos generales que la *diferencial* de una función $f(x, y, z)$ está dada por

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k. \quad (8.8)$$

Cabe hacer notar que la diferencial es únicamente la generalización de lo que ya conocemos en una dimensión, basta con generalizar utilizando el concepto de suma implícita como se muestra en el lado derecho de la ec.(8.8).

Resulta que los campos escalares y vectoriales dependen no solamente de la posición, sino también del tiempo, así es que es importante mencionar que la diferencial de dicho campo está dada por:

$$dT(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial T}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial T}{\partial t} dt. \quad (8.9)$$

Dividiendo esta última ecuación entre dt se obtiene la *derivada total* de la función $T(x, y, z, t)$:

$$\frac{dT(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x_k} v_k + \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (8.10)$$

en donde $v_k = dx_k/dt$. En el caso de mecánica de fluidos, el vector v_k corresponde justamente a la velocidad de las partículas de fluido como veremos más adelante.

La derivada total puede escribirse también como un operador de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} = v_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (8.11)$$

La ec.(8.8) nos permite calcular la generalización a la *regla de la cadena*. Por ejemplo, si $x = x(\alpha, \beta, \gamma)$, $y = y(\alpha, \beta, \gamma)$, $z = z(\alpha, \beta, \gamma)$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha}. \quad (8.12)$$

Para las derivadas de f con respecto a α y γ basta con sustituir β y γ respectivamente en lugar de α en la ec.(8.12). La ec.(8.12) es de carácter general y puede verse también como un operador:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial x_k}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (8.13)$$

¡Nota que la regla de la cadena en varias dimensiones no es más que una generalización natural de la regla de la cadena en una dimensión! De esta manera, en la ec.(8.13) podemos dar de comer al operador cualquier objeto matemático que se nos venga en mente: funciones escalares, funciones vectoriales y hasta funciones tensoriales. Por tanto, la regla de la cadena queda justificada para cualquier objeto matemático.

Finalmente, mostremos la generalización de la expansión de Taylor para el caso de funciones de varias variables. Para esto, observemos que en una dimensión la función $f(t)$ puede ser calculada alrededor de $t = t_0$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{0!} f \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^0 + \frac{1}{1!} \frac{df}{dt} \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^1 + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dt^2} \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dt^3} (t - t_0)^3 \Big|_{t=t_0} + \dots \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^\alpha. \end{aligned} \quad (8.14)$$

La manera lógica de generalizar la expansión de Taylor para una función de varias variables se sigue de la relación anterior:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \frac{1}{0!} F \Big|_{x_r=x_{(0)r}} + \frac{1}{1!} \frac{\partial F}{\partial x_k} \Big|_{x_k=x_{(0)k}} (x_k - x_{(0)k}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} \Big|_{x_r=x_{(0)r}} (x_k - x_{(0)k})(x_l - x_{(0)l}) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m} \Big|_{x_r=x_{(0)r}} (x_k - x_{(0)k})(x_l - x_{(0)l})(x_m - x_{(0)m}) + \dots \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_\alpha}} (x_{k_1} - x_{(0)k_1})(x_{k_2} - x_{(0)k_2}) \dots (x_{k_\alpha} - x_{(0)k_\alpha}), \end{aligned} \quad (8.15)$$

donde para evitar confusión hemos escrito al vector $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = x_{(0)k} \hat{e}_k$ y el vector $\mathbf{r} = x_k \hat{e}_k$ como es costumbre. En la ec.(8.15) no hicimos referencia al tipo de objeto que F pudiera ser. En otras palabras, el mismo resultado se hubiese obtenido siendo F un escalar, un vector o un tensor.

§9. Gradiente

Ya que es posible calcular las derivadas de la función $\Psi(x, y, z)$ con respecto a x , con respecto a y y con respecto a z es posible construir el arreglo de los tres números $(\partial\Psi/\partial x, \partial\Psi/\partial y, \partial\Psi/\partial z)$. A primera vista uno podría decir que este arreglo representa a un vector. Sin embargo, para que este arreglo de tres números sea un vector, debe cumplir con las propiedades básicas de transformación de vectores con respecto a rotaciones. En otras palabras, bajo una rotación del sistema coordenado Oxy de un ángulo θ

como se muestra en la fig.(I.6), las componentes del arreglo $(\partial\Psi/\partial x, \partial\Psi/\partial x, \partial\Psi/\partial y)$ deben transformarse justamente como las componentes de un vector (x, y, z) como se muestra en la ec.(2.3), es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial x'} &= \frac{\partial\Psi}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \sin\theta, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial y'} &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \cos\theta, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial z'} &= \frac{\partial\Psi}{\partial z}.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Debido a que esto resulta tedioso, mejor observemos el significado de la diferencial. Por ejemplo,

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x_k} dx_k = \begin{bmatrix} \partial\Psi/\partial x \\ \partial\Psi/\partial y \\ \partial\Psi/\partial z \end{bmatrix} \cdot d\mathbf{r}.\tag{9.2}$$

Como $d\Psi$ es un escalar y $d\mathbf{r}$ es un vector, necesariamente

$$\nabla\Psi = \mathbf{grad}\Psi \equiv \begin{bmatrix} \partial\Psi/\partial x \\ \partial\Psi/\partial y \\ \partial\Psi/\partial z \end{bmatrix} = \frac{\partial\Psi}{\partial x_k} \hat{\mathbf{e}}_k\tag{9.3}$$

es un vector (el producto punto de dos vectores es un escalar como mostramos en la sección §2). Al operador diferencial ∇ se le denomina *gradiente* y en algunas ocasiones *nabla* y hasta *del*. Como su nombre lo indica, ∇ es un operador y está esperando información a su derecha. Es como si este mismo estuviese hambriento. Existen muchos operadores diferenciales en las matemáticas. Por ejemplo, el operador diferencial d/dt es un operador de derivada con respecto al tiempo t y está esperando comer información en su derecha. En este caso, si insertamos a la derecha del mismo al vector posición $\mathbf{r}(t)$, esta operación nos da como resultado la velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Evidentemente también podemos insertar (multiplicar) cantidades del lado izquierdo del operador d/dt , solamente que el operador quedará aún hambriento y estará en espera de comer. Ejemplos de esto son el operador $\alpha d/dt$, $\mathbf{v}d/dt$, $\mathbf{v} \cdot d/dt$, etc.

De la misma manera, el operador diferencial ∇ debe ser aplicado a funciones que dependan de la posición. Como ∇ es ciertamente un vector, podemos utilizar en él todas las operaciones conocidas con vectores. Por ejemplo, $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial^2/\partial x_k \partial x_k$ es conocido como el *Laplaciano*, $\text{div } \mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \mathbf{f} = \partial f_k/\partial x_k$ se denomina el *divergente* de la función vectorial $\mathbf{f} = f_k \hat{\mathbf{e}}_k$ y $\mathbf{rot } \mathbf{f} \equiv \nabla \wedge \mathbf{f} = \epsilon_{ikl} \partial f_k/\partial x_i \hat{\mathbf{e}}_l$ representa el *rotacional* o *curl* de la función vectorial \mathbf{f} .

Veamos ahora que significado tiene el gradiente de una función escalar. Para esto, consideremos primeramente una superficie definida por la ecuación $\Psi(x, y, z) = \text{const} = \Psi_0$. Si en esta superficie tomamos dos puntos P y Q separados por $d\mathbf{r}$, entonces la diferencial de la función Ψ al moverse de P a Q es tal que $d\Psi = d\mathbf{r} \cdot \nabla\Psi = 0$. Esto significa que $d\mathbf{r}$ es un vector ortogonal a $\nabla\Psi$. Dicho de otra forma,

“el gradiente de una función Ψ es ortogonal a las superficies definidas por $\Psi = \text{const}$ (*superficies equipotenciales*)”.

Consideremos ahora dos superficies en el espacio de tres dimensiones que corresponden a los valores $\Psi(x, y, z) = \text{const}_1 \equiv \Psi_1$ y $\Psi(x, y, z) = \text{const}_2 \equiv \Psi_2$ y tomemos dos puntos P y Q tales que P esté contenido en $\Psi = \Psi_1$ y Q en $\Psi = \Psi_2$. El vector $\Delta \mathbf{r}$ que une a P y a Q está relacionado con la diferencial de la función Ψ mediante la relación $\Delta \Psi = \Psi_2 - \Psi_1 = \Delta \mathbf{r} \cdot \nabla \Psi = |\Delta \mathbf{r}| |\nabla \Psi| \cos \theta$, en donde θ es el ángulo que se forma entre los vectores $\Delta \mathbf{r}$ y $\nabla \Psi$. De esta relación se sigue que para valores fijos de $\Delta \Psi$, el vector $\Delta \mathbf{r}$ alcanza su valor mínimo cuando $\cos \theta = 1$. En otras palabras, este valor mínimo se alcanza cuando $\nabla \Psi$ es paralelo con $\Delta \mathbf{r}$. De la misma manera, para un $|\Delta \mathbf{r}|$ dado la variación de la función Ψ dada por $\Delta \Psi$ es maximizada al escoger $\Delta \mathbf{r}$ paralelo a $\nabla \Psi$. Esto significa que “el vector gradiente de una función Ψ apunta en la dirección de máximo cambio de la función Ψ ”.

El gradiente, por ser un vector, hereda ciertas propiedades de los vectores. Por ejemplo, es fácil ver que:

$$\nabla \wedge \nabla = 0, \quad (9.4)$$

(ie el rotacional del gradiente es cero) pues $\nabla \wedge \nabla \Psi = \epsilon_{klm} \partial^2 \Psi_m / \partial x_k \partial x_l = -\epsilon_{lkm} \partial^2 \Psi_m / \partial x_k \partial x_l = -\epsilon_{klm} \partial^2 \Psi_m / \partial x_l \partial x_k = -\epsilon_{klm} \partial^2 \Psi_m \partial x_k \partial x_l = 0$ ya que el único número que es igual a su negativo es el cero. Sin embargo, hay que tener cuidado pues $\nabla \Psi \wedge \nabla \Phi \neq 0$ en términos generales. Por lo tanto, aunque ∇ sea un vector, hay que ser cautelosos en su uso. No siempre todas las identidades son ciertas, como muestran las siguientes relaciones.

Tarea 2

Utilizando la notación de Einstein (suma implícita) demuestra las siguientes identidades:

$$(I) \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) = 0$$

$$(II) \nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \wedge \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \wedge \mathbf{b}$$

$$(III) \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \nabla \wedge \mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge \nabla \wedge \mathbf{a}$$

$$(IV) \nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a}$$

De esto se sigue que:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}.$$

Es curioso notar la similitud de esta relación con la famosa relación vectorial:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Es casi inmediato reconocer que cuando $\nabla \wedge \zeta = 0$ entonces $\zeta = \nabla \Psi$ para alguna función Ψ y que cuando $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ entonces $\mathbf{B} = \nabla \wedge \kappa$ para cierta función vectorial κ . En las próximas secciones mostraremos la veracidad de estas identidades que son excesivamente útiles en el estudio de la física.

Hasta ahora hemos visto las derivadas que pueden existir en el espacio de tres dimensiones Euclidianas. Sabemos que es posible hablar de la tasa de cambio de la función $T(x, y, z)$ a medida que se avanza en la posición x , y o z . Esta tasa, está representada justamente por las derivadas parciales con respecto a x , y y z respectivamente. ¿Y si deseamos saber la tasa de cambio de la función $T(x, y, z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección del vector $\mathbf{a} = a_i \hat{e}_i$? Para ver esta propiedad basta con hacer una rotación del sistema coordenado y utilizar la propiedad de que el producto punto es un escalar. En efecto, la tasa de cambio de la función $T(\mathbf{r})$ en la dirección x está dada por $\partial T / \partial x = \hat{e}_x \cdot \nabla T$. Debido a que \mathbf{grad} es un vector y \hat{e}_x también, entonces el producto escalar de ambos es un escalar, es decir, $\partial / \partial x = \hat{e}_x \cdot \nabla$ es un escalar. Si hacemos una rotación del sistema coordenado de tal manera que \hat{e}_x apunte en la dirección de \mathbf{a} entonces la cantidad $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{grad}$ tiene el mismo significado que antes: “es la derivada en la dirección en la que apunta el vector \mathbf{a} ”. Formalmente, la derivada en la dirección del vector \mathbf{v} está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}} \equiv \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla. \quad (9.5)$$

¡Cuidado! ¡El lado izquierdo de la ecuación tiene todo menos una división por un vector! Es solamente una manera común de escribir la derivada direccional.

§10. Integral de línea

Las funciones de una variable, digamos $f(x)$, pueden ser integradas en el intervalo $a \leq x \leq b$ mediante la relación

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n f(x_n) \Delta x_n, \quad (10.1)$$

donde $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ con $x_0 = a$ y $x_n = b$. Esta integral representa el área bajo la curva $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ del eje x .

Para una función de tres variables $F(x, y, z)$ nada nos impide integrar sobre cualquier eje o mas generalmente sobre cualquier curva Γ . De esta manera podemos definir la *integral de línea* como

$$\int_{\Gamma} F(\mathbf{r}) dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n F(\mathbf{r}_n) \Delta l_n, \quad (10.2)$$

donde el intervalo dl es tal que el vector tangente a la curva dl está dado por $dl = dx_k \hat{e}_k$ (suma implícita). Es decir, dl es un segmento de la curva Γ y está dado por $dl = \sqrt{dx_k dx_k}$.

A manera de ejemplificar lo anterior, consideremos que la curva Γ es el círculo que está en el plano Oxy de radio r y centrado en el origen. Así $\mathbf{l} = \mathbf{r} = r \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y = r \hat{e}_r$ como vimos en la ec.(4.1). Diferenciando esta relación se obtiene $d\mathbf{l} = dr \hat{e}_r + r d\varphi \hat{e}_\varphi$, donde el vector unitario que apunta en la dirección φ está dado por $\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y$.

Cuando la integral de línea es tomada sobre una curva cerrada, los físicos solemos escribir \oint como

símbolo de integración. De hecho, para ser mas formales, escribimos a la integral como \oint [†].

El ejemplo físico mas sencillo que existe de integral de línea es el trabajo. En mecánica, un pedacito de trabajo dW se define como $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ donde \mathbf{F} es la fuerza aplicada a un objeto que se desplaza $d\mathbf{l}$. De aquí que el trabajo total hecho por una partícula al moverse de la posición 1 a la posición 2 sobre la curva Γ esté dado por

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (10.3)$$

Como viste en tus cursos de mecánica, el potencial gravitacional ϕ es tal que $-\mathbf{grad} \phi = \mathbf{a}$, donde \mathbf{a} es la aceleración producida sobre una partícula de prueba en el campo gravitacional. Así pues, la integral $\int \nabla \phi \cdot d\mathbf{l}$ representa el trabajo por unidad de masa que una partícula hace en moverse de la posición inicial a la final. Antes de resolver esta integral, recordemos del curso de mecánica que este trabajo está dado por $\phi_{\text{final}} - \phi_{\text{inicial}}$ y no depende de la trayectoria escogida. De aquí se sigue que el trabajo hecho por la fuerza gravitacional alrededor de una trayectoria cerrada es cero ($\phi_{\text{final}} - \phi_{\text{inicial}} = \phi_{\text{inicial}} - \phi_{\text{inicial}} = 0$). Mostremos ahora este resultado de una manera formal. Notemos primero que $d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \phi)_{\tau} dl$, donde $(\nabla \phi)_{\tau}$ es la componente tangencial del gradiente de la función ϕ a la curva Γ . En el intervalo del punto inicial 1 al punto final de la curva 2 tomemos los puntos a, b, c, \dots de tal forma que:

$$\Delta\phi_1 = \phi(a) - \phi(1) = (\nabla\phi)_1 \cdot \Delta\mathbf{l}_1$$

$$\Delta\phi_2 = \phi(b) - \phi(a) = (\nabla\phi)_2 \cdot \Delta\mathbf{l}_2$$

...

Y por lo tanto $\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + \dots = \phi(2) - \phi(1) = \sum_k (\nabla\phi)_k \cdot \Delta\mathbf{l}_k$. En el límite, cuando la sucesión de puntos a, b, c, \dots crece de manera indefinida y de tal forma que $\Delta\mathbf{l}_k \rightarrow 0$, se tiene entonces que

$$\int_{\Gamma} \mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{l} = \phi(2) - \phi(1). \quad (10.4)$$

Evidentemente, la ec.(10.4) es válida para cualquier trayectoria que se tome en ir de 1 hasta 2 pues la elección de la curva Γ utilizada para la demostración de esta identidad ha sido arbitraria. De la ec.(10.4) se sigue que

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (10.5)$$

[†] La flecha alrededor del círculo significa que estamos integrando en sentido de la dirección contraria a las manecillas del reloj (pues también existe la integral \oint). El significado real de esta notación es que la integral de línea es calculada de tal manera que al dar una circulación sobre la trayectoria cerrada, cualquier área que tenga como frontera a esta curva tendrá su vector de área normal apuntando en la dirección en que se enroscaría un tornillo atornillado siguiendo la trayectoria de integración de la curva cerrada. Esto te quedará mucho mas claro cuando veamos integrales de superficie.

A manera de ejemplificar la importancia del resultado obtenido en la ec.(10.4), consideremos el trabajo por unidad de masa hecho por una partícula de prueba que se mueve de la posición 1 a la posición 2 sobre un campo gravitacional cuyo potencial está dado por ϕ . De esta manera, el trabajo por unidad de masa $W = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{1 \rightarrow 2} \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = -\phi(2) + \phi(1)$. Esto último se obtiene al utilizar la ec.(10.4) y el hecho de que la aceleración \mathbf{a} producida por el campo gravitacional en la partícula de prueba está relacionada con el potencial gravitacional ϕ mediante la relación $\mathbf{a} = -\nabla \phi$. Ahora bien, como $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = (d\mathbf{v}/dt) \cdot (d\mathbf{l}/dt)dt = (d\mathbf{v}/dt) \cdot \mathbf{v}dt = (d\mathbf{v}^2/dt)dt/2$, entonces

$$T(2) - T(1) = \frac{1}{2}v^2 \Big|_1^2 = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{1 \rightarrow 2} \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = -\phi(2) + \phi(1) \quad (10.6)$$

y por lo tanto

$$T(1) + \phi(1) = T(2) + \phi(2) = \text{const.} \quad (10.7)$$

en donde hemos escrito a la energía cinética por unidad de masa de la partícula de prueba como $T = v^2/2$. En otras palabras, la ec.(10.7) implica que la suma de la energía potencial mas la energía cinética es una constante. Este resultado es mejor conocido como la *conservación de la energía*[†].

§11. Integrales de área y volumen

En la sección anterior vimos como definir una integral sobre una línea cualquiera. De manera natural, generalizando estos conceptos, puede definirse una integral sobre un área y un volumen.

La *integral de superficie* o *integral de área* se define utilizando el concepto de *elemento de área* o *elemento de superficie*. Consideremos una superficie S suave, es decir, una superficie que posee un plano tangente en cualquiera de sus puntos. Un elemento de área $d\mathbf{a}$ es un vector definido de tal forma que representa un “pedacito” de área da de la superficie S y cuya dirección es normal a la superficie (o al plano tangente para ser mas precisos) en el punto en cuestión. Existen dos vectores que son ortogonales a la superficie con esta propiedad. y ambos son antiparalelos entre sí. En el caso de una superficie cerrada, la dirección del vector $d\mathbf{a}$ se escoge de tal forma que este vector apunta hacia afuera de la superficie. Por ejemplo, consideremos un cubo cuyas caras son paralelas a los planos $0xy$, $0xz$ y $0zy$. Es claro que el elemento de área de las caras paralelas al plano $0xy$ está dado por $\pm dx dy \hat{e}_z$. El signo positivo corresponde a la cara del cubo paralela al plano $0xy$ y que está en la dirección “hacia los z 's positivos”. A la inversa sucede con la otra cara del cubo. Análogamente, los elementos de área

[†] Si en alguna ocasión te habías preguntado el por qué la energía potencial se define de manera negativa, es justamente para que la energía total del sistema debe ser una cantidad conservada. Si se hubiese definido ϕ tal que $\nabla \phi = \mathbf{a}$ es claro que la energía del sistema no se conserva matemáticamente hablando.

paralelos a los planos $0xz$ y $0yz$ están dados respectivamente por: $\pm dx dz \hat{e}_y$ y $\pm dy dz \hat{e}_x$. De manera general se puede decir entonces que en coordenadas cartesianas el elemento de área a una superficie suave cualquiera está dado por:

$$d\mathbf{a} = dx dy \hat{e}_z + dz dx \hat{e}_y + dy dz \hat{e}_x. \tag{11.1}$$

En términos generales, cualquier superficie $\mathcal{S}(\eta, \zeta)$ parametrizada por los parámetros η y ζ tiene como vectores tangentes a cualquier combinación lineal de $\partial\mathcal{S}/\partial\eta$ y $\partial\mathcal{S}/\partial\zeta$. De esta manera, un vector normal a la superficie \mathcal{S} está dado por

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\eta} \wedge \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\zeta}, \tag{11.2}$$

y por lo tanto, el elemento de área está dado por:

$$d\mathbf{a} = d\eta d\zeta \hat{\mathbf{n}} = d\eta d\zeta \left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\eta} \wedge \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\zeta} \right). \tag{11.3}$$

Así pues, podemos definir la integral de superficie como:

$$\int F(x, y, z) d\mathbf{a} \equiv \iint F(x, y, z) d\mathbf{a}. \tag{11.4}$$

Nótese que también se puede integrar $\int \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a}$ o $\int F(\mathbf{r}) |d\mathbf{a}|$ y cualquier variante. Basta con que dentro del símbolo de integral aparezca el elemento de área $d\mathbf{a}$ o su norma da . Por ejemplo, la integral de área de la función unidad sobre un plano paralelo al plano $0xy$ está dada por $\int da = \iint da = \iint dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} dy dx = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} dx = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) = (\text{área del plano})$, como era de esperarse (de lo contrario no llamaríamos a la integral, integral de área). Aquí queda mas claro el significado de las dos integrales \iint . Significa que primeramente hay que integrar a la función en el integrando con respecto a una variable (digamos x) dejando constantes las variables restantes (en este caso y y z) y después con respecto a la otra variable de integración (digamos y) dejando fijas las variables sobrantes (en este caso x y z). Las funciones suficientemente decentes son tales que da lo mismo integrar con respecto a una variable y luego con respecto a la otra o a la inversa (solamente recuerda que la integral es un límite y por lo tanto debe ser posible intercambiar dos límites que se multiplican si es que el límite existe). Los físicos utilizamos la notación de escribir una sola integral en vez de dos (que es la manera formal). Es únicamente útil escribir varias integrales al momento de hacer los cálculos, pues uno debe poner los límites de las integrales e integrar primero una parte y luego la otra. A partir de lo mencionado con respecto a la integral de área es claro que si $F(x, y) = f(x)g(y)$ entonces:

$$\int F(x, y) dx dy = \iint f(x)g(y) dx dy = \int f(x) dx \int g(y) dy. \tag{11.5}$$

De manera totalmente natural un elemento de volumen dV en el espacio de tres dimensiones está da-

do por $dx dy dz$ en coordenadas cartesianas[†]. De esta manera uno puede definir la integral de la función $F(\mathbf{r})$ como:

$$\int F(\mathbf{r}) dV = \iiint F(\mathbf{r}) dV = \iiint F(\mathbf{r}) dx dy dz. \quad (11.6)$$

¡Cuidado! En coordenadas cilíndricas por ejemplo el elemento de volumen **no** está dado por $\rho d\rho d\phi dz$. Para comenzar este elemento no tiene dimensiones de volumen. De hecho, para calcular este elemento de volumen hay que utilizar la regla de la cadena. En efecto, como en este caso $x_k = x_k(\rho, \phi, z)$ como lo muestra la ec.(4.2) es necesario hacer uso de la regla de la cadena, ec.(8.8), para transformar las diferenciales dx , dy , dz . Haciendo esto se obtiene que $dV = \rho d\rho d\phi dz$ en el caso de las coordenadas cilíndricas. De manera análoga hay que utilizar la regla de la cadena para el caso del elemento de área da .

§12. Teoremas de Gauss y Stokes

El teorema central del cálculo integral y de la geometría diferencial es el *teorema de Stokes* o *teorema de Gauss*. En los cursos de cálculo se hace una clara distinción entre ambos, pero es justamente la geometría diferencial la que nos muestra que ambos teoremas describen precisamente el mismo resultado: *la integral de una función sobre una hipersuperficie de dimensión n es igual a la “derivada” de esta función sobre una hipersuperficie de dimensión $n + 1$ que tiene como frontera a la hipersuperficie de dimensión n primeramente considerada. Es decir:*

$$\int_{\partial S} F = \int_S (\text{derivada})F, \quad (12.1)$$

en donde S es una hipersuperficie de dimensión $n + 1$ y ∂S es su frontera que tiene dimensión n . Para nuestros propósitos en el curso analizaremos lo que se conoce como el teorema de Stokes y teorema de Gauss de manera tradicional y veremos que tipo de derivada debe aparecer en el lado derecho de la ec.(12.1).

Comencemos definiendo lo que se conoce como *el flujo de un campo vectorial*, que nos será de gran utilidad para analizar la mecánica de fluidos. Denominamos el flujo de un campo vectorial v a la integral

$$\oint v \cdot da. \quad (12.2)$$

[†] Quizás te estés preguntando cual es la razón de que el elemento de área se puede definir como un vector y el elemento de volumen es un escalar. En términos mucho mas generales también se puede definir el elemento de volumen como un “vector”. Imaginemos para esto un espacio de cuatro dimensiones donde la cuarta dimensión la escribimos como t (el famoso tiempo). Entonces las rebanadas del espacio-tiempo que corresponden a $t = \text{const}$ son justamente elementos de volumen en tres dimensiones como los que hemos utilizado hasta ahora. La componente temporal del cuatro-vector de volumen que corresponde a la “hipersuperficie” $t = \text{const}$ es justamente $dV = dx dy dz$. Genial ¿no?

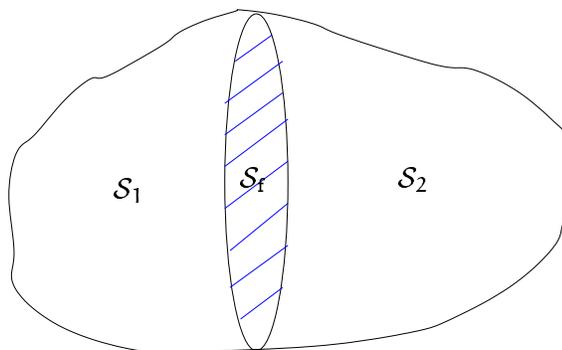


Figura I.17: La superficie S que se muestra en la figura es dividida en dos secciones S_1 y S_2 . La frontera entre estas dos nuevas superficies es S_f . El flujo de un campo vectorial sobre la superficie S es igual a la suma del flujo de sus partes S_1 y S_2 (ver texto).

La integral es tomada a lo largo de una superficie cerrada que contiene al volumen V .

Consideremos una superficie cualquiera S como la que se muestra en la fig.(I.17), y dividámosla en dos secciones S_1 y S_2 , las cuales tienen como frontera a la superficie S_f . La suma de los flujos del campo vectorial v sobre las superficies S_1 y S_2 se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} v \cdot d\mathbf{a} + \oint_{S_2} v \cdot d\mathbf{a} &= \left\{ \oint_{S_1} + \oint_{S_2} \right\} v \cdot d\mathbf{a} \\ &= \left\{ \oint_{S_1-S_f} + \oint_{S_2-S_f} + \oint_{S_f \text{ (lado 1)}} + \oint_{S_f \text{ (lado 2)}} \right\} v \cdot d\mathbf{a}, \end{aligned}$$

pero como el elemento de área $d\mathbf{a}_1$ en la cara 1 es el negativo del elemento de área $d\mathbf{a}_2$ de la cara 2 entonces las últimas dos integrales del lado derecho de la igualdad son una el negativo de la otra y así:

$$\begin{aligned} &= \left\{ \oint_{S_1-S_f} + \oint_{S_2-S_f} \right\} d\mathbf{a} \cdot v \\ &= \oint_S d\mathbf{a} \cdot v. \end{aligned} \tag{12.3}$$

De esta manera queda demostrado que si una superficie cerrada se rebana en diversas superficies cerradas (todas con volumen distinto de cero) entonces “la suma de los flujos de un campo vectorial de cada una de las partes constituyentes de una superficie, es igual al flujo del campo vectorial sobre la superficie original”.

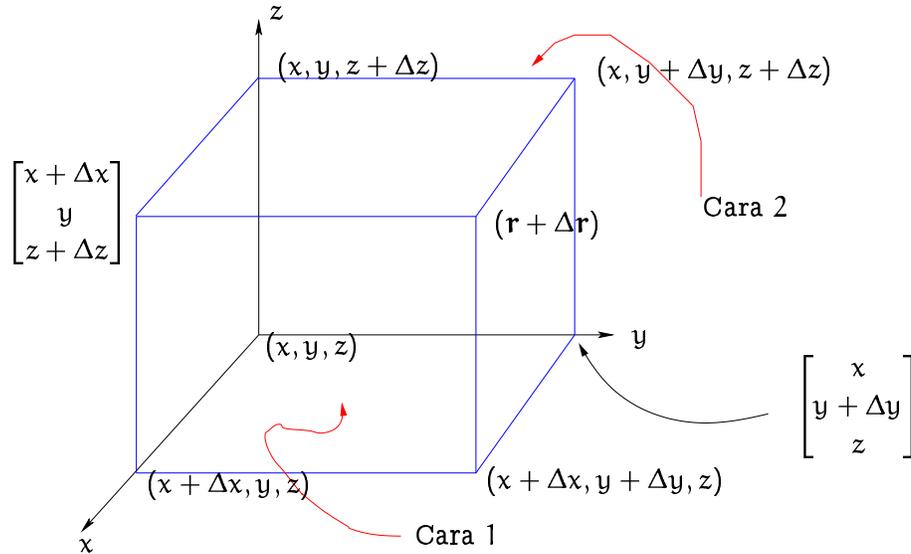


Figura I.18: Cubo con caras paralelas a los planos $0xy$, $0xz$ y $0yz$. Uno de los vértices del cubo se encuentra en el punto (x, y, z) . La longitud de los lados del cubo están definidos por los incrementos Δx , Δy y Δz hechos a las coordenadas x , y y z respectivamente. Un cubo de tamaño infinitesimalmente pequeño como este es útil para mostrar el teorema de Gauss.

Calculemos ahora el flujo de un campo vectorial $\zeta(\mathbf{r})$ sobre un cubo infinitesimalmente pequeño como el que se muestra en la fig.(I.18):

$$\oint \zeta \cdot d\mathbf{a} = \int \{\zeta_x da_x + \zeta_y da_y + \zeta_z da_z\} \quad (12.4)$$

pero como

$$\begin{aligned} \int \zeta_x da_x &= \int \zeta_x dy dz, \\ &\approx \zeta_x(2) \Delta y \Delta z - \zeta_x(1) \Delta y \Delta z, \\ &= \left\{ \zeta_x(1) + \frac{\partial \zeta_x}{\partial x} \Delta x \right\} \Delta y \Delta z - \zeta_x(1) \Delta y \Delta z, \\ &= \frac{\partial \zeta_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z, \end{aligned} \quad (12.5)$$

y por lo tanto $\int \zeta_y da_y \approx (\partial \zeta_y / \partial y) \Delta x \Delta y \Delta z$ así como $\int \zeta_z da_z \approx (\partial \zeta_z / \partial z) \Delta x \Delta y \Delta z$, se sigue entonces que:

$$\oint d\mathbf{a} \cdot \zeta \approx (\nabla \cdot \zeta) \Delta V, \quad (12.6)$$

donde ΔV es el volumen del cubo infinitesimalmente pequeño.

Consideremos ahora una superficie cualquiera S que este cerrada y que posea un volumen interno

V distinto de cero. Esta superficie puede ser “rebanada” en varios cubitos pequeños, infinitesimales. Sobre cada uno de estos cubitos podemos aplicar el resultado de la ec.(12.6). La suma (integral) de todos estos flujos debe ser igual al flujo total sobre la superficie S de acuerdo al resultado mostrado en la ec.(12.3). Este resultado se conoce como el *teorema de Gauss*:

$$\oint_{\text{da}} \zeta \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int (\text{div } \zeta) dV. \tag{12.7}$$

Por otra parte, la *circulación*, frecuentemente denotada por Γ , de un campo vectorial \mathbf{F} alrededor del circuito (cerrado) C se define como la integral:

$$\Gamma \equiv \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \tag{12.8}$$

Lo que ya sabemos hasta ahora es que si $\mathbf{F} = \text{grad } \Psi$ entonces la circulación de \mathbf{F} alrededor de cualquier circuito C es cero.

Consideremos un circuito cerrado cualquiera C y dividámoslo en dos circuitos, el circuito C_1 y el circuito C_2 como se muestra en la fig.(I.19). Entonces utilizando el hecho de que el elemento de longitud $d\mathbf{l}$ evaluado en la frontera común que comparten las curvas C_1 y C_2 es tal que $d\mathbf{l}_1 = -d\mathbf{l}_2$ se sigue que:

$$\left\{ \oint_{C_1} + \oint_{C_2} \right\} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \left\{ \oint_{C_1 - C_{\text{común}}} + \oint_{C_2 - C_{\text{común}}} + \cancel{\oint_{C_{\text{común}_1}}} + \cancel{\oint_{C_{\text{común}_2}}} \right\} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{12.9}$$

$$= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Dicho de otro modo, la circulación alrededor de un contorno es igual a la suma de las circulaciones de los contornos que puedan construirse dentro del contorno original y que posean como frontera a este mismo. Este resultado es completamente análogo al correspondiente con respecto al flujo de un campo vectorial sobre una superficie cerrada.

El corolario natural del resultado obtenido en la ec.(12.9) es el siguiente. Tomemos una curva (cerrada) C que resulte ser la frontera de una superficie (abierta) cualquiera S como lo muestra la fig.(I.20). Sobre la superficie S hacemos una división (cuadrícula) con diversos circuitos. Es claro entonces que:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{C_k} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \tag{12.10}$$

Calculemos ahora la circulación de un campo vectorial cualquiera \mathbf{F} sobre un rectángulo infinitamente pequeño de lados Δx por Δy paralelo al plano Oxy como lo muestra la fig.(I.21):

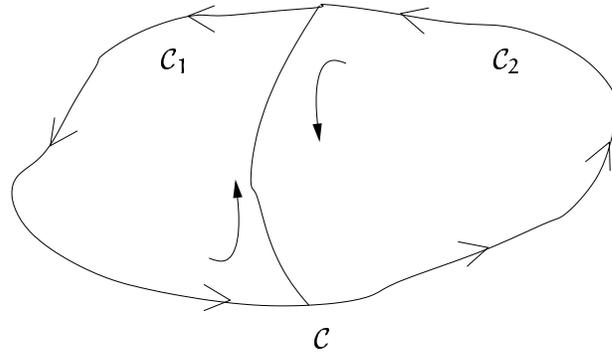


Figura I.19: El circuito C es dividido en dos circuitos arbitrarios C_1 y C_2 . La circulación de cualquier vector F alrededor del circuito C es igual a la suma de las circulaciones del mismo vector F sobre los circuitos C_1 y C_2 (ver texto).

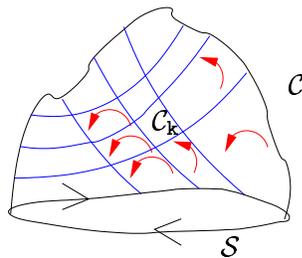


Figura I.20: La circulación de un campo vectorial sobre la curva frontera C de la superficie abierta S es igual a la suma de las circulaciones sobre los circuitos C_k 's escogidos arbitrariamente y que llenan a la superficie S .

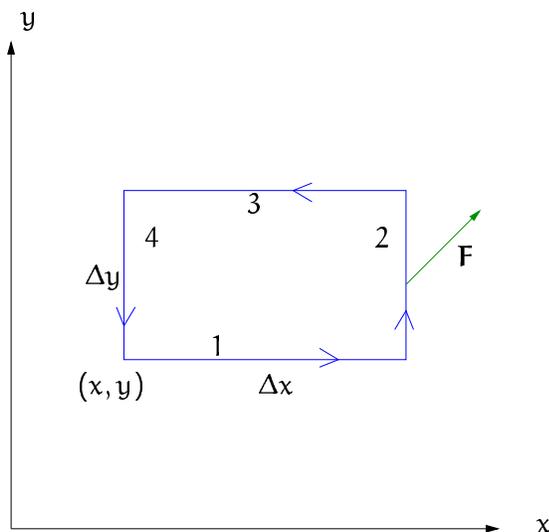


Figura I.21: La circulación de un campo vectorial F sobre un rectángulo infinitamente pequeño de ancho Δx por Δy es calculada como la suma de las integrales de línea sobre los segmento 1, 2, 3 y 4.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= F_x(1)\Delta x + F_y(2)\Delta y - F_x(3)\Delta x - F_y(4)\Delta y \\ &= \{F_x(1) - F_x(3)\}\Delta x + \{F_y(2) - F_y(4)\}\Delta y \end{aligned}$$

pero como $F_x(3) \approx F_x(1) - (\partial F_x / \partial y)\Delta y$ y también $F_y(4) \approx F_y(2) - (\partial F_y / \partial x)\Delta x$ entonces

$$\begin{aligned} &\approx \left\{ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right\} \Delta x \Delta y \\ &= (\nabla \wedge \mathbf{F})_z \Delta \alpha_z \text{ (¡no suma implícita!) } \\ &= (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha}, \end{aligned} \tag{12.11}$$

donde el elemento de área $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ apunta hacia afuera de este papel (dirección del vector \hat{e}_z). La última igualdad de la ec.(12.11) es una cantidad escalar, y por tanto debe tener la misma forma en cualquier sistema de referencia. Así es que si rotamos nuestros ejes coordenados de cualquier forma, lo que encontramos es que la circulación de un campo vectorial F alrededor de un rectángulo infinitamente pequeño está dada por

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha}. \tag{12.12}$$

Consideremos ahora una superficie abierta S cuya frontera es la curva cerrada C . Debido a que es

posible dividir a la superficie S en rectángulos pequeños, podemos calcular la circulación sobre cada uno de estos rectángulos, sumar todas las contribuciones (integrar) y utilizar el resultado de la ec.(12.9) para obtener el *teorema de Stokes*[†]:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (12.13)$$

Nota: La integral del lado izquierdo de la ec.(12.13) está tomada a lo largo de *CUALQUIER* superficie suficientemente descente cuya frontera sea el circuito C .

Como mencionamos al comienzo de esta sección, los teoremas de Stokes y Gauss son la misma cosa (aunque no lo vamos a mostrar aquí) y se denomina en términos generales, *teorema de Stokes* (Gauss tiene demasiadas contribuciones a la física y a la matemática que una mas o una menos no le daña su currículum vitae). Piensa en su significado y vuelve a echar un vistazo a la ec.(12.1). ¿Puedes ver donde está su conexión?

§13. Algunas aplicaciones de los teoremas de Gauss y Stokes

A manera de mostrar el poder de los teoremas de Gauss y Stokes vamos a mostrar ciertas relaciones matemáticas. Primeramente consideremos una función vectorial \mathbf{F} tal que $\text{rot } \mathbf{F} = 0$. Utilizando el teorema de Stokes se sigue entonces que para cualquier superficie abierta S cuya frontera sea la curva cerrada C :

$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Comparando esta relación con la ec.(10.5) se ve que necesariamente $\mathbf{F} = \nabla\psi$, para alguna función ψ .

Consideremos ahora el campo vectorial \mathbf{F} y calculemos su circulación a lo largo de un circuito infinitamente pequeño C . Utilizando el teorema de Stokes podemos escribir la circulación como la integral sobre cualquier superficie S abierta cuya frontera es el circuito C como lo muestra la ec.(12.13). Ahora bien, en el límite cuando el circuito tiende a un punto (lo cual implica que la superficie S tiende hacia una superficie cerrada) es evidente que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ (pues el circuito es un punto). De esta manera el lado derecho de la ec.(12.13) se convierte en una integral de superficie cerrada con valor igual a cero, es decir, $\oint (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = 0$. Utilizando el teorema de Gauss, ec.(12.7), se obtiene entonces que para cualquier superficie S y para cualquier volumen dentro de la misma V se sigue la siguiente identidad:

[†] Como mencionamos anteriormente, el teorema de Stokes es uno de los teoremas centrales de la geometría diferencial. Stokes era Profesor Lucasiano de Matemáticas en el departamento de matemáticas de la Universidad de Cambridge e investigador en el Laboratorio de física (mejor conocido como el Laboratorio Cavendish) de la misma Universidad. El teorema de Stokes apareció por primera vez impreso en uno de los exámenes de matemáticas tomado por Maxwell. Evidentemente, esto fue de gran importancia para el desarrollo de la teoría del electromagnetismo. La demostración explícita mas antigua que se conoce parece ser aquella que en una carta Thomson mandó a Stokes en Julio 2 de 1850

$$\oint_{\partial V=S} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F}) dV = 0.$$

Dada la arbitrariedad del volumen V en consideración, la integral del lado derecho en esta última ecuación debe ser cero sin importar el volumen que se tome. En otras palabras, el integrando en esta integral debe ser cero, es decir $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F}) = 0$. Este mismo resultado fue obtenido en la Tarea 2 mediante cálculo directo.

Hasta aquí llegamos en lo correspondiente al cálculo vectorial. Lo demás se lo dejamos a los maestros de cálculo para que te empapen con ejercicios y demostraciones a lo largo de todo un año. Espero que esta introducción te sea de utilidad. Cuando hayas cursado todos tus cursos de cálculo, vuelve a leer esta sección, te será de mucha utilidad. Buena suerte y recuerda que importa muchísimo que seas excesivamente veloz cuando tengas que calcular.

Capítulo II

Mecánica de fluidos

La *mecánica de fluidos* es la rama de la física que se dedica al estudio del movimiento de los fluidos, tales como los líquidos (agua, aceite, etc) y los gases. Esta rama de la física no es mas que una aplicación generalizada de las leyes de la mecánica a cuerpos que poseen varias partículas que se encuentran “amarradas” de tal forma que “fluyen” a diferencia de los sólidos, cuyas partículas están amarradas también, pero no fluyen.

La mecánica de fluidos es simplemente una aplicación de la mecánica Newtoniana o Relativista si es que las velocidades características del problema son comparables a la velocidad de la luz en el vacío.

Formalmente la mecánica de fluidos estudia a los líquidos (líquido proviene del Latín y significa *fluir*), como el agua, y a los gases[†], como el aire. El estudio de los líquidos es frecuentemente denominado *hidrodinámica* proveniente de la palabra Griega que significa “los movimientos del agua” y el de los gases *neumática* que proviene de la palabra Griega “los movimientos del aire”.

La comunidad científica frecuentemente abusa de los nombres y denomina *hidrodinámica*[‡] a la mecánica de fluidos. Sin embargo en algunas ramas de la ingeniería y la física esta igualdad de términos **no** es válida. Para nuestros propósitos no haremos distinciones entre la palabra hidrodinámica y mecánica de fluidos a menos que sea necesario.

§14. Fluidos

Comencemos por preguntarnos, ¿qué es un fluido? Aunque todos tenemos idea natural de lo que es un fluido, la respuesta no es tan inmediata.

Básicamente, un fluido es todo aquello que “fluye” como su raíz Latina lo indica, sin embargo existen muchas cosas que fluyen en este universo las cuales no son tan evidentes. Si has estado en iglesias muy viejas habrás notado que los vidrios de las ventanas con su extenso colorido son mucho mas anchos en las partes inferiores que en las superiores. Esto se debe a que la fuerza de la gravedad actúa sobre el

[†]La palabra gas fue inventada por el químico Flamenco Jean Baptista van Helmont quien la derivó aparentemente de la palabra Griega caos.

[‡]La palabra *hidrodinámica* fue concebida por el matemático suizo Daniel Bernoulli en 1738.

crystal y lo hace fluir. Es decir, el vidrio es un fluido; pero un fluido bastante extraño y no vale la pena tratarlo como tal. En realidad se comporta mejor como un sólido deformado bajo la influencia de la fuerza gravitacional a lo largo de mucho años[†].

Para entender mejor que es un fluido, regresemos al curso de mecánica y preguntémosnos ¿qué es un sólido? Un sólido es un cuerpo mas o menos rígido que tiene una forma definida. Los sólidos resisten a las fuerzas que intentan alterar su forma, sin embargo al aumentar la fuerza se llega a un punto en que esta resistencia se rompe y la deformación puede llevarse a cabo. Por ejemplo, intenta deformar tu bolígrafo. Si intentas con una fuerza suficientemente pequeña verás que no es posible. Si aumentas esta fuerza eventualmente llegarás al punto en el cual podrás romper tu bolígrafo. Los sólidos se mueven todos en una sola pieza, es decir, si una parte del mismo se mueve todo el cuerpo se mueve de tal forma que la forma original del cuerpo se mantiene (intenta mover tu bolígrafo, no es necesario que hagas moverse a todas las pequeñas partículas que lo constituyen, basta con mover solo una parte del mismo)[‡].

Existen cuerpos que no tienen una forma definida y no se resisten a deformaciones. En el caso de un estiramiento de los mismos, por pequeño que sea, estos cuerpos alteran su forma. Particularmente estos cuerpos responden de manera natural a la fuerza del campo gravitacional que estos reciben y alteran su forma de tal manera que su energía potencial se reduce a un mínimo[§]. Esto ocasiona que dichos cuerpos caigan hacia la superficie de la tierra y hagan plana su estructura tanto como les sea posible. Por ejemplo, si este cuerpo se encuentra en un frasco contenedor, el cuerpo tomará la forma del frasco, ocupando su volumen interior. Si el frasco está abierto por arriba y se voltea el cuerpo en cuestión se derramará para alcanzar así un estado de energía gravitacional mínimo. De la misma manera, si se hace un agujero por la parte inferior del frasco, el cuerpo “*fluirá*” por este agujero por la influencia de la fuerza gravitacional para minimizar así su energía potencial. A los cuerpos de la naturaleza con esta propiedad, la propiedad de *fluir*, se les denomina fluidos.

Los fluidos se dividen en dos categorías. En la primera clase, la fuerza de gravedad resulta esencial para la forma que el fluido toma. En esta clase, el fluido toma la forma del frasco contenedor y se acumula en las partes inferiores del mismo de tal manera que el fluido no necesariamente “llena” el frasco. A estos fluidos se les denomina *líquidos*. El líquido mas famoso que existe es el agua. La segunda clase de fluidos tienden a llenar el frasco contenedor por completo, a pesar de la fuerza gravitacional que actúa sobre cada una de sus partes. Este fluido no tiene un volumen definido por si mismo. Estos

[†]La razón verdadera por la cual un vidrio es un fluido y no un sólido es la siguiente. Los sólidos están formados por cristales (pequeñas partículas microscópicas de formas regulares) en formas alineadas y ordenadas. El vidrio no posee estas estructuras cristalinas, además de que no tiene un punto de ebullición rápido como todos los sólidos. La razón por la cual el cristal fluye de manera tan lenta se debe a que posee un alto grado de fricción interna entre sus partes constituyentes. A esta fricción interna de un fluido se le denomina *viscosidad* que es una palabra Latina que viene de ligas pegajosas de algunas resorteras utilizadas en la antigüedad con esta propiedad. Mas adelante hablaremos mas sobre la viscosidad.

[‡]Los cuerpos sólidos se comportan como tales pues las diminutas partículas que los constituyen están alineadas en posiciones fijas y ordenadas. En los líquidos estas partículas se mueven libremente. Microscópicamente, esto es lo que hace la diferencia entre sólido y líquido.

[§]La energía potencial de un cuerpo sobre la tierra es mas negativa (o menor) para cuerpos mas cercanos al centro de la misma.

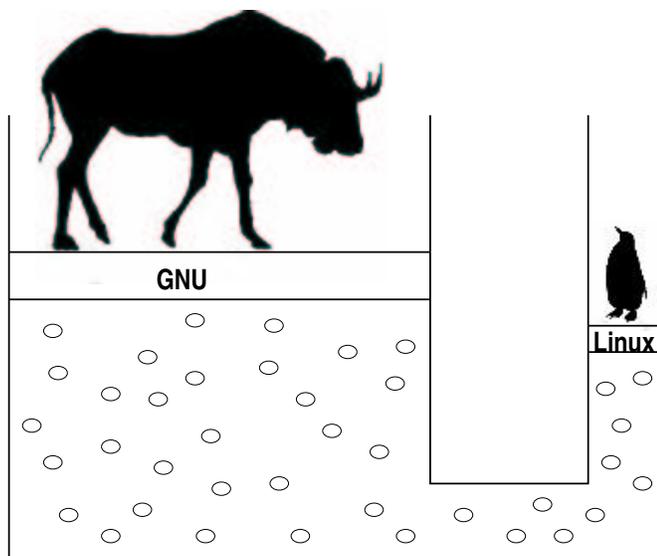


Figura II.1: Dentro de un recipiente cerrado como el que se muestra en la figura, se encuentra un fluido, digamos un líquido. Mediante la aplicación de una fuerza menor (como el peso de un pingüino de Linux) sobre un área menor es posible levantar a una fuerza mayor (como el peso de un GNU) que se aplica en un área mayor que la primera. Este tipo de maquinaria se denomina *prensa hidráulica*[†].

fluidos, que no tienen un volumen definido como tal, se denominan *gases*. El aire que todos respiramos en la superficie de la tierra es el ejemplo típico de un gas.

§15. Principio de Pascal

Imaginemos un recipiente como el que se muestra en la fig.(II.1) llamado *prensa hidráulica*. Dos pistones, uno de área grande y otro de área pequeña se desplazan sobre un recipiente con líquido. En el lado derecho de la figura el peso de un pingüino es capaz de levantar a un pesado gnu que está en el pistón izquierdo.

Este fenómeno ocurre gracias a que el peso del pingüino desplaza una cantidad de volumen igual a la que empuja al peso del gnu. Si las áreas de los pistones son S_1 y S_2 y el desplazamiento vertical que estos producen es l_1 y l_2 respectivamente, entonces dado que los volúmenes desplazados son iguales se sigue que $S_1 l_1 = S_2 l_2$, o bien:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (15.1)$$

El trabajo total en balancear las fuerzas (F_1 y F_2) que actúan sobre los pistones (el peso del gnu y el pingüino) debe ser cero. De esta manera $F_1 l_1 = F_2 l_2$ o bien $F_2/F_1 = l_1/l_2$. De aquí y con ayuda de la ec.(15.1) se sigue que:

[†]Los nombres GNU y Linux no son casualidad. Para mayor información visita <http://www.gnu.org>.

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}. \quad (15.2)$$

Esta relación nos quiere decir que $F_{\text{gnu}} = (S_{\text{gnu}}/S_{\text{ping}})F_{\text{ping}}$. En otras palabras, la fuerza que ejerce el pingüino es $(S_{\text{gnu}}/S_{\text{ping}})$ veces aumentada para que sea capaz de elevar al gnu. De esta manera, entre mas pequeña sea el área sobre la cual actúa el peso del pingüino, mas grande será la fuerza que se aplica sobre el gnu. Las prensas hidráulicas sirven para levantar carros (gatos hidráulicos), para prensar metales, para moldear metales, para ... ¡Imagínate!

Evidentemente la ganancia de la fuerza obtenida se acompaña con una pérdida de longitud. Por ejemplo, imagina que el área del pistón pequeño es de 1 cm^2 y la del pistón grande es de 10 cm^2 . Si se presiona en el pistón pequeño de tal forma que se mueva 1 cm , entonces el volumen del líquido desplazado es $1 \text{ cm}^2 \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^3$. El pistón grande debe moverse tanto como para hacer lugar al centímetro cúbico desplazado por el pistón pequeño. De esta manera el pistón grande se mueve $1 \text{ cm}^3/10 \text{ cm}^2 = 0.1 \text{ cm}$. En este caso la fuerza se ha multiplicado por un factor de diez, pero ese factor es justamente lo que ha perdido el desplazamiento del pistón mas grande.

La cantidad Fuerza / Área que naturalmente aparece en la ec.(15.2) se denomina frecuentemente *presión* y se denota por la cantidad p . Las unidades de la presión son las unidades de fuerza entre área. En el sistema mks (metro, kilogramo y segundo) estas unidades son N/m^2 . De esta manera la ec.(15.2) puede escribirse como un *balance de presiones*:

$$p_1 = p_2. \quad (15.3)$$

En la derivación de la ec.(15.3) no hemos supuesto el tamaño de los pistones, ni su orientación. En otras palabras, si los pistones hubiesen estado verticales, horizontales o a un ángulo y hubiesen tenido cualquier tamaño, el mismo resultado se hubiera obtenido: las presiones p_1 y p_2 sobre la superficie de los pistones sería idéntica.

De esta manera, la presión en un líquido, y generalmente hablando en un fluido, es la misma en todos sus puntos y en todas las direcciones. Dicho de otra forma, una fuerza idéntica es ejercida en elementos de área del mismo tamaño sin importar su orientación. Este hecho físico es tan importante que se denomina *principio de Pascal*[†] en honor al matemático Francés Blaise Pascal. Mas adelante daremos una definición mas precisa del mismo cuando construyamos las ecuaciones de movimiento y conservación de la mecánica de fluidos.

El conocer el volumen de una sustancia no significa conocer su masa. La experiencia cotidiana nos enseña que el peso de un cuerpo varía de acuerdo a la naturaleza de la sustancia que lo forma. Por ejemplo, todos sabemos que el acero es mas “pesado” que el aluminio siempre y cuando los volúmenes

[†] En física nuestros axiomas se llaman *principios* y son los fundamentos básicos de una teoría. De estos mismos pueden deducirse matemáticamente las leyes que se observan en distintos experimentos. Ejemplos de principios son: el principio de relatividad en mecánica que ya conoces, el principio de Pascal en hidrodinámica y el principio de incertidumbre en mecánica cuántica.

sean idénticos. Si los volúmenes son distintos uno puede escoger un volumen de aluminio mucho mayor para que ambos pesos sean idénticos. En física se define la *densidad* ρ como la masa de un objeto dividido por su volumen.

En términos generales la densidad y la presión no son constantes a lo largo de un fluido (ni de un sólido), piensa en el aire de la atmósfera por ejemplo. De esta manera, la densidad y la presión varían punto a punto en el espacio y también en el tiempo y en términos generales uno puede hablar del *campo de presiones* $p(\mathbf{r}, t)$ y del *campo de densidades* $\rho(\mathbf{r}, t)$.

De esta manera se define a la presión como el cociente de la fuerza neta que ejerce un pedacito de fluido sobre sus paredes cuando el volumen de este pedazo de fluido tiende a cero. Así mismo la densidad de un fluido se define como el cociente entre la masa de una pequeña porción de fluido entre su volumen en el límite en el que su volumen tiende a cero.

§16. Presión hidrostática

El principio de Pascal como fue enunciado en la sección anterior falla en un detalle sobre la tierra: no toma en cuenta la fuerza de gravedad. Por ejemplo, dos elementos de áreas iguales horizontales a distintas alturas sumergidos en una alberca experimentan distintas presiones. El elemento de área mas cercano al piso tiene una columna de agua sobre el mas grande que el elemento de área mas lejano al piso. De aquí que la fuerza o el peso en el área mas cercana al piso sea mayor que en la otra área. Esto ocasiona que la presión en las partes mas profundas de la alberca sea mayor a las menos profundas. En otras palabras, la ec.(15.3) deja de ser válida. Para generalizar esta relación, calculemos la diferencia de presiones $\Delta p = p_2 - p_1$ a dos alturas distintas.

Imaginemos un cilindro invisible sumergido en un fluido. Las bases del cilindro se encuentran paralelas al piso. El fluido se encuentra sobre la superficie de la tierra que produce una fuerza gravitacional igual a mg , donde m es la masa y g es la aceleración del campo gravitacional en la superficie de la tierra $g \sim 10 \text{ m/s}^2$. La acción de la fuerza gravitacional sobre el fluido produce una fuerza sobre el cilindro. Esta fuerza es claramente igual al peso mg del fluido dentro del cilindro. De esta manera la diferencia de fuerzas $F_2 - F_1 = mg$. Suponiendo que la densidad del fluido se mantiene constante, se sigue entonces que $m = \rho ghS$ donde ρ es la densidad del fluido, h es la altura del cilindro y S el área de su base. La diferencia de presiones en la cara superior y la inferior se obtiene dividiendo a la diferencia de fuerzas entre S . De tal manera que la diferencia de presiones está dada por

$$p_2 - p_1 = \rho gh. \quad (16.1)$$

Utilizando el principio de Pascal, se sigue que la presión es la misma para distintos elementos de área orientados de cualquier forma y localizados a la misma profundidad. De aquí que entre cualesquiera dos puntos uno arriba de otro a una altura h la diferencia de presiones está dada por la ec.(16.1). Seguramente ya lo habrás notado, pero en el análisis anterior hemos utilizado el hecho de que la posición

2 del fluido es la más cercana a la superficie de la tierra. Esto es claro pues las superficies más cercanas al suelo cargan con más peso con respecto a las superficies más lejanas al mismo.

La presión que ejerce el agua por su propio peso se denomina *presión hidrostática*. Sin embargo, nosotros los humanos somos “peces” que vivimos en un inmenso océano de gas, el aire. Debido a que la fuerza gravitacional actúa también sobre el aire se sigue que la presión del aire atmosférico es también una función de la altura[†]. La presión que ejerce el aire en la superficie terrestre sobre cualquier objeto (digamos nosotros, el agua de los océanos, etc) se denomina *atmosférica*.

La conclusión de todo este análisis es que la fuerza que actúa sobre un elemento de área sumergido en un fluido se debe únicamente a la elevación de la columna de fluido por encima del mismo. Todas las demás fuerzas que actúan sobre este elemento de área se cancelan de acuerdo al principio de Pascal.

Tarea 3

- (1) **Paradoja hidrostática.** Considera dos recipientes como los que se muestran en la fig.(II.2). Ambos recipientes son llenados hasta la misma altura con un fluido, digamos agua. El líquido produce una presión de igual magnitud en el fondo de ambos recipientes. Sin embargo las columnas del líquido por encima de ambas superficies tienen distintos volúmenes. En otras palabras, ¡las presiones deberían ser distintas para cada recipiente y por lo tanto el Principio de Pascal no es válido! Explica esta aparente paradoja, la llamada paradoja hidrostática.

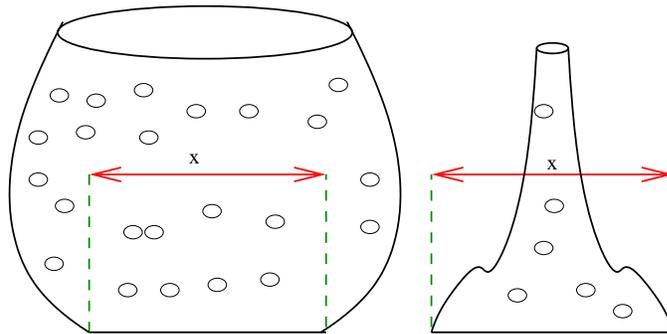


Figura II.2: Dos recipientes de distinta forma poseen líquido. El líquido produce una presión de igual magnitud en el fondo de ambos recipientes. Sin embargo las columnas del líquido por encima de ambas superficies tienen distintos volúmenes. Esta aparente contradicción se denomina la *paradoja hidrostática*.

[†] Los alpinistas saben muy bien que la presión del aire atmosférico disminuye enormemente a medida que una montaña con altura considerable se alcanza. Por ejemplo, en la punta del Citlaltépetl (Pico de Orizaba) que se encuentra en los estados de Puebla y Veracruz, con una altura de 5610 m sobre el nivel del mar la presión disminuye en un 50 % comparada con la presión al nivel del mar. De la misma manera, los buzos deben cuidar en exceso su cuerpo al intentar descubrir las profundidades del inmenso océano de nuestro planeta. Al sumergirse por tan solo 10 m la presión hidrostática aumenta por un factor de 2 con respecto al valor en la superficie. Esto es de esperarse pues el agua es mucho más densa que el aire, y una columna de unos cuantos metros de aire no pesa tanto como lo haría una columna de agua de la misma altura.

- (ii) *En las construcciones los albañiles utilizan frecuentemente una manguera la cual es rellena con agua dejando un espacio libre en ambos extremos de la misma. El nivel del agua coincide en ambos extremos de la manguera sin importar la longitud de los extremos o los movimientos que se hagan. Este sencillo instrumento sirve como nivel en las construcciones. Demuestra utilizando el principio de Pascal la validez del “nivel del albañil” y generalízalo para mostrar que varios tinacos de agua conectados todos entre si por tubos en la azotea de un edificio tienen todos el mismo nivel de agua (si nunca haz visto esto, busca un edificio y sube a la azotea del mismo para ver como están interconectados varios tinacos).*

§17. Presión atmosférica

Hasta ahora no hemos hablado de las diferentes unidades de la presión. En el sistema internacional (SI) las unidades de la presión son N/m^2 , mejor conocida como el *Pascal* (Pa). Sin embargo, la presión atmosférica suele referirse con respecto a la presión atmosférica al nivel del mar. La presión del aire a nivel del mar es igual a 1013300 dyn/cm^2 . Se define una bar como un millón de dinas por centímetro cúbico. De esta manera, $1 \text{ atm} = 1.0133 \text{ bars}$, donde la unidad atm significa *atmósfera*.

Pero ... ¿Cómo se mide la presión atmosférica? La presión del aire fue primeramente medida por el físico italiano Evangelista Torricelli en 1644. El instrumento que utilizó Torricelli para esto se denomina *barómetro* y está basado en las ideas físicas que hemos descrito hasta ahora.

Para hacer un barómetro basta con utilizar un líquido denso, digamos mercurio. Una buena cantidad de mercurio se pone en un recipiente ancho. Por otra parte, en un tubo de cristal cerrado por un lado, se vacía mercurio hasta llenarlo. Con un dedo se cierra el lado abierto del tubo. Al girar el tubo de tal manera que este quede ortogonal al piso, con la tapa abierta (que fue cerrada con el dedo) apuntando hacia abajo, se introduce dentro del recipiente lleno con mercurio. La mayor parte del tubo debe dejarse fuera del recipiente. De esta manera, la parte superior del tubo se encuentra “vacía” (de hecho este vacío se denomina frecuentemente *vacío de Torricelli*) y la columna de mercurio que se levanta en el tubo mide 76 cm si el barómetro se encuentra a nivel del mar. La longitud del mercurio en el tubo disminuye al subir montañas, es decir, cuando la presión disminuye.

La razón por la cual el experimento de Torricelli funciona es la siguiente. La presión del aire en la atmósfera que se ejerce sobre la superficie del mercurio en el recipiente abierto es capaz de mantener la columna de mercurio a una altura de unas cuantas décimas de centímetro. ¡Genial! En la ausencia de presión es claro que la altura del mercurio en el tubo sería nula. La razón por la cual se utiliza mercurio para el experimento es porque es un líquido excesivamente denso (13579.04 kg/m^3). Si se utiliza otro líquido como el agua, cuya densidad ($\sim 1 \text{ g/cm}^3$)[†] es mucho menor a la del mercurio evidentemente la columna tendrá mas longitud. Esto se debe a que el peso que debe ejercer la columna de agua en el tubo del barómetro de Torricelli debe balancear a la presión del aire. Es claro que para que el peso de

[†]No es casualidad que la densidad del agua sea exactamente 1 g/cm^3 . El sistema métrico en 1790 definió al gramo como el peso de un centímetro cúbico de agua.

una columna de agua sea igual al peso de una columna de mercurio, la longitud de la columna de agua debe ser mucho mayor a la del mercurio.

Debido a la importancia del experimento de Torricelli nuevas unidades de presión son utilizadas en sobradas ocasiones. La presión atmosférica del aire se mide frecuentemente en milímetros de mercurio. De esta manera $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$. Por si fuera poco, se define 1 torricelli como un milímetro de mercurio.

Tarea 4

- (I) *Al nivel del mar, ¿qué altura debe tener el tubo del barómetro de Torricelli si el experimento se hace con agua en lugar de mercurio?*
- (II) *¿En que consiste el funcionamiento del sifón? Muestra como es posible “ordeñar” un coche utilizando una manguera. Recuerda que para hacer esto es necesario quitar el aire de la manguera succionándolo. . . ¿Importa si la manguera del sifón está doblada? ¿Y si la manguera sube cinco metros y después baja para estar por debajo del automóvil?*
- (III) *Calcula la presión atmosférica en la cima del Pico de Orizaba (Citlaltépetl) que está a 5610 m sobre el nivel del mar. No es nada sorprendente que el cuerpo de un alpinista sufra deterioros considerables a esta altura: falta de oxígeno, evaporación del agua rápida y por lo tanto deshidratación, etc. Imagínate, sin suficiente agua en la sangre, esta se vuelve viscosa y por lo tanto no irriga al cerebro como se debe. Todas estas circunstancias ocasionan el mal de montaña que llega a dañar irreversiblemente el cerebro y en ocasiones es letal.*

El hecho de que exista presión atmosférica y que sea posible de alguna manera crear un *vacío* mediante el uso del barómetro de Torricelli llevó a la gente a pensar en la posibilidad de generar un vacío. El vacío (de la palabra Latina *vacuus*) es un lugar en el cual la presión tiene un valor de cero. Ni siquiera el espacio interestelar se encuentra totalmente vacío, pues tiene del orden de unos cuantos átomos de hidrógeno por centímetro cúbico.

La primer persona que intentó hacer un vacío fue Otto von Guericke en 1654. Von Guericke entendió los experimentos de Torricelli y los utilizó para mostrar que verdaderamente la atmósfera terrestre produce una presión. El experimento consistió en utilizar dos hemisferios de cobre que estaban conectados por una rondana anular. El aire fue sacado de entre las esferas utilizando un tubo que estaba conectado a una de las esferas. Al hacer esto resultó imposible separar las esferas debido a la presión del aire sobre las mismas. Von Guericke amarró caballos a las esferas mediante una cuerda para intentar separarlos. Ni siquiera la fuerza de ocho caballos pudieron separar las esferas, pues un vacío considerable se había alcanzado en el interior de las mismas.

cuerpo. A este resultado se le conoce como *el principio de Arquímedes*[†].

El peso (W_{dentro}) de un cuerpo sumergido en un fluido (como el agua) es igual al peso del cuerpo fuera del fluido $W_{\text{fuera}} = \rho_{\text{cuerpo}} g V_{\text{cuerpo}}$ menos el peso del agua desplazada $W_{\text{fluido}} = \rho_{\text{fluido}} g V_{\text{fluido}}$. Aquí hemos escrito a la densidad (del fluido y del cuerpo) como ρ_{fluido} y ρ_{cuerpo} . V representa el volumen y g a la aceleración del campo gravitacional sobre la superficie de la tierra. De esta manera

$$W = g (\rho_{\text{cuerpo}} V_{\text{cuerpo}} - \rho_{\text{fluido}} V_{\text{fluido}}). \quad (18.1)$$

El principio de Arquímedes es muy útil para saber si la leche o el alcohol de las bebidas no ha sido reducido. Para esto se utiliza un aparato denominado *aerómetro* y funciona sumergiéndolo en el líquido en consideración. El aerómetro se sumerge mucho o poco dependiendo de la densidad del líquido. Cuando el aerómetro esté en equilibrio, entonces la fuerza de flotación es igual al peso del aerómetro. Basta con calibrar el aparato con unas divisiones para así poder utilizarlo adecuadamente.

Nuestro cuerpo posee una densidad que es un poco mayor a la unidad (es decir, a la densidad del agua). Esto implica al intentar nadar, el cuerpo no flota y tiende a hundirse. La razón por la cual somos capaces de nadar es porque es posible meter una cantidad razonable de aire en los pulmones para ayudar a la flotación, combinada con los movimientos del cuerpo. Sin embargo, la densidad de la sal es un poco mayor que la unidad. Esto hace que entre mas salado sea una mar, mas fácil sea flotar. En ciertas regiones del mar Caspio la densidad es de 1.18 con respecto a la densidad del agua. En estos lugares del mar Caspio es posible recostarse en el agua y mirar con detenimiento una noche estrellada sin correr el riesgo de hundirse.

Tarea 5

- (i) *La historia del barco Titanic, de fabricación Británica, es conocida por todos: un témpano (iceberg) en el camino de la nave la destruyó. La densidad del hielo es mas o menos 10 % menor que la del agua. Calcula cuanto volumen de hielo se encuentra sumergido en el agua y cuanto se encuentra en la parte exterior. Imagina que el iceberg es del tamaño del cerro de la Estrella de la ciudad de México. ¿Ya vez ahora que no es fácil esquivarlos?*

[†]Cuenta la historia que el matemático griego Arquímedes fue quien descubrió este resultado en el siglo tercero antes de Cristo. Resulta que el rey Hiero de Siracusa dudaba que la corona que había recibido del joyero estaba hecha de oro. El rey decía que el joyero había hecho la corona con aleación de plata, pero no podía demostrarlo. El rey pidió a Arquímedes que aclarara sus dudas sin destrozarse la corona. Lo único que Arquímedes sabía era que una corona compuesta de oro-plata tendría una densidad menor que una hecha de oro. Lo anterior se sigue del hecho de que la densidad del oro es 19300 kg/m^3 y la de la plata es 10490 kg/m^3 . Arquímedes sabía entonces que si pudiese fundir un pedazo de la corona y ponerlo en un volumen conocido (digamos un cubo) entonces sabría si la corona estaba hecha de oro-plata. La historia cuenta que Arquímedes descubrió el principio de flotación al introducirse en una bañera y observar como el nivel del agua en la misma aumentaba. Arquímedes salió corriendo desnudo por las calles de Siracusa gritando ¡Eureka! ¡Eureka! Arquímedes introdujo la corona en agua y pudo deducir de inmediato que la corona era falsa. El destino del joyero es de imaginarse...

- (i) *El material con el que está hecho un porta-aviones es de acero. El acero es muchísimo mas denso ($\sim 10^4 \text{ kg/m}^3$) que el agua y por si fuera poco la nave es capaz de cargar tanques de guerra, aviones, armamento, transporte terrestre, tripulación, etc. ¿Cómo es posible entonces que un barco tan pesado y tan “denso” flote?*

§19. Formalismo

Ahora que ya sabemos un poco mas sobre el concepto de presión en un fluido y su historia, veamos como describir a un fluido desde el punto de vista físico y matemático.

En lo sucesivo hablaremos de una *partícula de fluido* (en ocasiones la gente habla de un *elemento de fluido* para no abusar del lenguaje) refiriéndonos a un volumen de fluido excesivamente pequeño, de tal forma que podamos tratarlo como un punto matemático. Físicamente esto significa que una partícula de fluido es un pedazo del fluido mucho mas pequeño que la dimensión característica del fluido en consideración. Por ejemplo, en astrofísica un elemento de fluido puede ser del tamaño del monte Everest. Evidentemente, una partícula de fluido contiene una cantidad demasiado grande de partículas elementales. Cuando nos refiramos al movimiento de una partícula de fluido lo haremos refiriéndonos no al movimiento individual de cada una de sus partículas elementales (átomos, etc). Al decir que una partícula de fluido se mueve, nos referimos al movimiento de una pequeña porción del fluido que contiene un número elevado de varias moléculas. Lo único que hay que tener en mente es que la partícula de fluido es un punto matemático.

Para poder describir los movimientos de un fluido de manera matemática es necesario saber el valor de ciertas propiedades físicas del mismo. La velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ de cada una de las partículas de fluido es una de las cantidades mas importantes para describir el comportamiento de un fluido. La función $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ representa un *campo vectorial* y de ahora en adelante lo llamaremos el *campo de velocidades del fluido* o simplemente la *velocidad del fluido*.

El campo de velocidades depende no solamente de la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$, sino también del tiempo t . El ejemplo mas sencillo es el agua que fluye en un río. La velocidad de las partículas de agua es mayor en las cascadas y en lugares rectos que en los lugares planos y no curvos (ie la velocidad depende de la posición). También la velocidad de las partículas de agua varía en verano (cuando llueve mucho) a invierno (cuando la época de sequía es notable).

Ya mencionamos en las secciones anteriores que la densidad $\rho(\mathbf{r}, t)$ y la presión $p = p(\mathbf{r}, t)$ son campos escalares y describen de manera natural a un fluido.

Así pues, la descripción de un fluido queda totalmente determinada mediante las tres componentes de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, la densidad $\rho(\mathbf{r}, t)$ y la presión $p(\mathbf{r}, t)$ [†].

Es importante enfatizar que la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ se refiere a la velocidad de un fluido en un punto

[†] Formalmente hablando, en lugar de la presión p y la densidad ρ es posible escoger cualesquiera dos variables termodinámicas. Esto se debe a que, con la ecuación de estado termodinámico del fluido y el valor de, digamos ρ y p , las demás cantidades termodinámicas quedan totalmente determinadas.

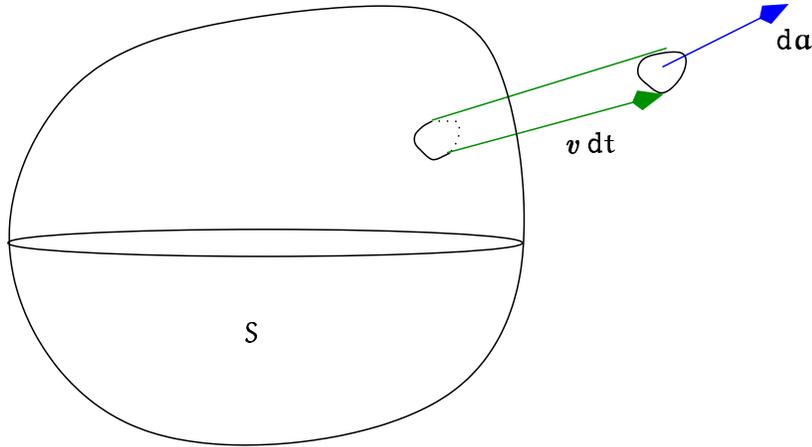


Figura II.3: La figura muestra el flujo de masa (o simplemente flujo) de un fluido a través de una pequeña superficie da que es parte del volumen V_0 cuya frontera es S_0 . El flujo de masa que pasa por el pequeño cilindro de altura $v dt$ (velocidad por tiempo) y base da está dado por $\rho v \cdot da$.

específico del espacio r al tiempo t . Es decir, se refiere a puntos que están fijos en el espacio (no se mueven con el fluido) y no a partículas del fluido puesto que estas últimas se mueven mientras el tiempo avanza. Lo mismo sucede con la densidad y la presión. ¡No lo olvides!

Así pues, para describir a un fluido son necesarias cinco cantidades. Las tres componentes de la velocidad $v(r, t)$ y dos cantidades termodinámicas, por ejemplo la presión $p(r, t)$ y la densidad $\rho(r, t)$. En otras palabras, en las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un fluido, deben aparecer estas cinco cantidades. El número de estas ecuaciones es cinco (cinco ecuaciones para cinco incógnitas, como en las ecuaciones lineales algebraicas). A estas ecuaciones se les debe agregar las condiciones de frontera (digamos los valores de estas cinco cantidades en las fronteras de la superficie de un cilindro que contiene agua) e iniciales (valores de las cinco cantidades al tiempo $t = t_0$ por ejemplo) que el problema pudiera tener.

§20. Ecuación de continuidad

Pasemos ahora a derivar las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica. Primeramente derivaremos la ecuación que describe la conservación de la materia o conservación de masa.

Consideremos un volumen V_0 de fluido. La masa de este fluido está dada por $\int \rho dV$, tomando la integral a lo largo del volumen V_0 . De acuerdo a la fig.(II.3), la masa de fluido por unidad de tiempo que fluye a través del elemento de área da está dada por $\rho v \cdot da$. Debido a que el elemento de área da apunta hacia afuera de la superficie, la cantidad $\rho v \cdot da$ es positiva si el fluido fluye hacia afuera de la superficie y negativa en caso contrario.

De esta manera, la masa total del fluido que fluye hacia afuera a través del volumen V_0 por unidad de tiempo está dada por

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (20.1)$$

tomada sobre la superficie cerrada S_0 . Por otra parte, el decremento de masa del volumen V_0 por unidad de tiempo está dado por

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV. \quad (20.2)$$

Igualando la ec.(20.1) con la ec.(20.2) se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}, \quad (20.3)$$

pero utilizando el teorema de Gauss en la integral de superficie se obtiene entonces que $\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int \text{div}(\rho \mathbf{v}) dV$. De aquí que la ec.(20.3) pueda escribirse como[†]:

$$\int dV \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right\} = 0. \quad (20.4)$$

Para mostrar la ec.(20.4) no hicimos ninguna suposición sobre el tipo de volumen que se tenga. En otras palabras, la ec.(20.4) es válida para cualquier volumen. La única forma de que esto ocurra es si el integrando (cantidad entre corchetes) de esta ecuación es nulo, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (20.5)$$

Esta última ecuación es muy importante. Aparece en innumerables ramas de la física y en el caso de la hidrodinámica representa la conservación de masa. A esta relación se le denomina la *ecuación de continuidad*. El vector $\mathbf{j} \equiv \rho \mathbf{v}$ se denomina frecuentemente *densidad de flujo de masa* o simplemente *densidad de flujo*. Esta densidad de flujo tiene dimensiones de masa entre unidad de área, entre unidad de tiempo. Dicho de otro modo, el vector densidad de flujo mide la cantidad de masa que fluye por una unidad de área ortogonal al vector velocidad, en una unidad de tiempo, en la dirección del vector velocidad.

§21. Ecuación de Euler

Pasemos a derivar ahora la ecuación de movimiento (ecuación de Newton) que describe a un fluido. Para empezar, volvamos a enunciar el *Principio de Pascal* de una manera mas precisa: “*la presión que se ejerce sobre una porción del fluido es la misma en todas direcciones y es perpendicular a la superficie*”

[†] La derivada parcial con respecto al tiempo que actúa sobre la integral del lado izquierdo en la ec.(20.3) puede meterse sin ningún problema en la integral. Esto se debe a que la integral se está tomando con respecto a la posición (volumen) y la derivada es con respecto al tiempo. Como la derivada y la integral son límites, en este caso es posible intercambiar el signo de integral por el de derivada. Si la integral fuese tomada sobre el tiempo, entonces habría que derivar no solo al integrando de la integral, sino también al elemento de integración.

que actúa". Matemáticamente, esto significa que la fuerza total que actúa sobre un volumen de fluido está dada por:

$$-\oint p \, d\mathbf{a}, \quad (21.1)$$

donde la integral está tomada sobre la superficie que es frontera al volumen en consideración. Por la ley de Newton, sabemos que la fuerza (cualquiera que sea) debe ser igual a la masa por la aceleración. En otras palabras, la ec.(21.1) debe ser igual a la masa por la aceleración total del volumen V_0 que está dada por

$$\int \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, dV. \quad (21.2)$$

Igualando las ecs.(21.1)-(21.2) se sigue entonces que

$$\int \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, dV = -\oint p \, d\mathbf{a}. \quad (21.3)$$

La integral de superficie en el lado derecho en la ec.(21.3) puede ser transformada en una integral de área utilizando el teorema de Gauss. Esto no es tan inmediato puesto que como lo muestra la ec.(12.7) para utilizar el teorema de Gauss (o el teorema de la divergencia) el integrando en la integral de superficie debe ser un vector multiplicado escalarmente por el elemento de área $d\mathbf{a}$. Lo único que hay que recordar es que el teorema de Gauss no solamente es válido para vectores \mathbf{f} como el que aparece en la ec.(12.7), sino que también es válido para cualquier tensor (de cualquier rango) que se contraiga con el vector $d\mathbf{a}$. Por ejemplo, Si Π_{klmp} es un tensor de rango 4, entonces el teorema de Gauss, ec.(12.7), puede generalizarse de la siguiente manera:

$$\oint \Pi_{klmp} \, da_p = \int \frac{\partial \Pi_{klmp}}{\partial x_p} \, dV. \quad (21.4)$$

Ahora bien, regresemos a la ec.(21.1) y observemos que $P \, d\mathbf{a} = P \, da_k \hat{\mathbf{e}}_k = P \delta_{kl} da_l \hat{\mathbf{e}}_k$. De esta manera y utilizando la ec.(21.4), el lado derecho de la ec.(21.1) puede escribirse como[†]:

$$\begin{aligned} \oint p \, da_k \hat{\mathbf{e}}_k &= \oint p \delta_{kl} da_l \hat{\mathbf{e}}_k, \\ &= \int \frac{\partial p}{\partial x_l} \delta_{kl} \, dV \hat{\mathbf{e}}_k, \\ &= \int \frac{\partial p}{\partial x_k} \, dV \hat{\mathbf{e}}_k, \\ &= \int (\mathbf{grad} P) \, dV. \end{aligned} \quad (21.5)$$

[†] Este resultado es en ocasiones conocido como una de las identidades de Green. Sin embargo, utilizando la notación de Einstein es posible obtenerlo de manera inmediata y no es necesario ponerle una etiqueta y llevarlo a la categoría de teorema.

Sustituyendo la ec.(21.5) en la ec.(21.3) se obtiene que

$$\int \left\{ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla P \right\} dV = 0. \quad (21.6)$$

En la derivación de este resultado no hemos supuesto nada especial con respecto al volumen en consideración. En otras palabras, si el volumen que hubiésemos escogido era chico, grande, cuadrado, cilíndrico y demás, el mismo resultado hubiese sido obtenido. La única forma en la que esto pueda ser cierto es si la cantidad entre corchetes en la ec.(21.6) sea idénticamente igual a cero y por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P. \quad (21.7)$$

La derivada con respecto al tiempo que está aplicada a la velocidad en el lado izquierdo de la ec.(21.7) es una derivada total. Esta derivada no denota la tasa de cambio de la velocidad del fluido con respecto a un punto en el espacio. Muy por el contrario, representa la tasa de cambio de la velocidad de una partícula de fluido dada a medida que esta se mueve en el espacio. Esta derivada tiene que estar expresada en términos de cantidades que se refieren a puntos fijos en el espacio. De esta manera, la diferencial $d\mathbf{v}$ en la velocidad de una partícula de fluido durante el intervalo de tiempo dt está dada por dos partes. La primera es el cambio de la velocidad \mathbf{v} durante el tiempo dt en una posición fija, es decir, está dada por $(\partial\mathbf{v}/\partial t)dt$. La segunda tiene que ver con la diferencia de las velocidades (al mismo tiempo) de dos puntos separados por $d\mathbf{r}$. Aquí el vector $d\mathbf{r}$ es la distancia recorrida por la partícula de fluido en cuestión durante el tiempo dt , así esta segunda parte está dada por $dx_k(\partial\mathbf{v}/\partial x_k) = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. De esta manera la diferencial de la velocidad está dada por

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

Dividiendo esta última relación por dt se obtiene la *derivada total*[†] de la velocidad (cf ec.(8.10)):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \quad (21.8)$$

Sustituyendo la ec.(21.8) en la ec.(21.7) se obtiene la ecuación de movimiento (ecuación de Newton) para un fluido, mejor conocida como la *ecuación de Euler*:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (21.9)$$

Para el caso de una partícula moviéndose a lo largo de un campo gravitacional con aceleración[‡]

[†]Esta derivada se denomina también *derivada substancial* y mas frecuentemente *derivada Euleriana*. Este último nombre no es casualidad. Existen coordenadas para describir a un fluido que se mueven con el mismo (*coordenadas Lagrangianas*). Esto es como describir el tráfico de una avenida con respecto a un automóvil que fluye sobre la misma. Nosotros hemos descrito a un fluido con respecto a puntos fijos de un sistema de referencia (*coordenadas Eulerianas*). Siguiendo la analogía de la avenida, esto es como describir el tráfico en una avenida con respecto a un puente fijo en la misma.

[‡]En el caso mas sencillo la ley de Gravitación universal de Newton puede escribirse como $\mathbf{F} = m_1\mathbf{g} = -Gm_1m_2\hat{\mathbf{r}}/r^2$ y

$\mathbf{g} = -\text{grad } \phi$ la ecuación de movimiento está dada por

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\nabla\phi. \quad (21.12)$$

De esta manera, si un fluido se mueve a lo largo de un campo gravitacional de aceleración \mathbf{g} , comparando la ec.(21.9) y la ec.(21.12) se sigue que en este caso el lado derecho de la ecuación de Euler, ec.(21.9), debe contener además de los gradientes de presión, la aceleración del campo gravitacional

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P + \mathbf{g}. \quad (21.13)$$

Para derivar la ecuación de movimiento (ecuación de Euler) no hemos tomado en cuenta cualquier disipación de energía que se pudiera llevar a cabo mediante la fricción entre las distintas partículas del fluido durante su movimiento. Es decir, hemos considerado que el fluido no posee *viscosidad*. Tampoco hemos tomado en cuenta el hecho de que exista una transferencia de calor entre las distintas partes del fluido (*conductividad térmica*). Este tipo de fluidos, en los cuales la conductividad térmica y la viscosidad son despreciados se denomina *ideales* y trabajaremos con este tipo de fluidos en casi todo lo que resta del curso.

Ahora bien, como un fluido ideal no intercambia calor entre sus diversas partes significa que cada partícula de fluido se mueve de manera adiabática. En otras palabras, si s es la entropía por unidad de masa (*entropía específica*)[†] la condición de movimiento adiabático está dada por $ds = 0$. Dividiendo por dt a esta ecuación se sigue que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \quad (21.14)$$

En sobradas aplicaciones es útil considerar fluidos para los cuales la entropía no solo se mantiene constante a lo largo de la trayectoria de una partícula de fluido como lo muestra la ec.(16.1). Esta ecuación se simplifica para los casos en los que la entropía es una constante a lo largo de todo el fluido y por lo tanto

por lo tanto el campo gravitacional (aceleración) producido por una masa puntual es tal que $(\mathbf{F}/m_2) \rightarrow \mathbf{g}$ cuando $m_2 \rightarrow 0$. El hecho de hacer tender la masa m_2 a cero es para que su influencia no perturbe la gravedad producida por la masa m_1 . Así, podemos hablar del campo vectorial de aceleraciones producidas por la masa m_1 . De esta manera se dice en términos generales que el *campo gravitacional* \mathbf{g} está dado por

$$\mathbf{g} = -G \frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (21.10)$$

De aquí se sigue que $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, donde el potencial gravitacional ϕ (que es un campo escalar) está dado por (¡demuéstralo!)

$$\phi = -G \frac{m}{r}. \quad (21.11)$$

[†] En mecánica de fluidos las cantidades termodinámicas son generalmente referidas con respecto a una unidad de masa. Así se habla de la energía interna por unidad de masa ϵ (energía específica), la entalpía por unidad de masa w (entalpía específica), el volumen específico ($= 1/\rho$), etc.

$$s = \text{const} \quad (21.15)$$

A este tipo de fluidos se les denomina *isentrópicos* y serán de gran utilidad a lo largo del curso.

Al final de la sección §19 mencionamos que para describir a un fluido necesitamos cinco ecuaciones. La ecuación de continuidad cuenta por una. Las tres componentes de la ecuación de Euler cuentan por tres y la ecuación de la conservación de la entropía cuenta por una. En suma, cinco ecuaciones para cinco incógnitas. En cursos avanzados de ecuaciones diferenciales, aprenderás que estas ecuaciones poseen solución (aunque en sobradas ocasiones no es trivial encontrarla) siempre y cuando se den las condiciones de frontera (valores de la velocidad en las paredes sólidas de un recipiente) e iniciales (a un tiempo t).

§22. Hidrostática

A manera de ejemplificar el poder de las ecuaciones de la hidrodinámica, consideremos el caso en el cual un fluido se encuentra en equilibrio *hidrostático*. En otras palabras, consideremos un fluido en reposo. De esta manera, la ecuación de Euler, ec.(21.13) toma la forma[†]

$$\text{grad } P = \rho \mathbf{g} \quad (22.1)$$

Esta ecuación es importantísima. Describe el equilibrio de las fuerzas de presión (lado izquierdo de la ecuación) con las fuerzas de gravitación. Veamos algunas aplicaciones de esta ecuación.

El caso mas sencillo ocurre cuando $\mathbf{g} = 0$, es decir, cuando no existe un campo gravitacional que actúe sobre el fluido (imagina un fluido libre en el espacio). De esta manera, la ec.(22.1) queda como $\nabla P = 0$ y por lo tanto $P = \text{const}$. Este resultado no es de sorprender pues simplemente expresa el principio de Pascal: la presión es la misma en todo el fluido.

Compliquemos un poquito las cosas y supongamos que el fluido se encuentra sobre la superficie de la tierra (por ejemplo el gas atmosférico o el agua del océano). En la superficie de la tierra la aceleración gravitacional está dada por $\mathbf{g} = -g\hat{e}_z$. Aquí hemos puesto un sistema de referencia de tal forma que el eje z apunta hacia arriba de la superficie de la tierra. De esta manera y escribiendo a la ec.(22.1) por componentes tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (22.2)$$

De las primeras dos ecuaciones se sigue que la presión $p = \text{const}$ para alturas fijas ($z = \text{const}$). Esto ya lo sabíamos y es lógico: la presión en un fluido sobre la superficie de la tierra no varía a alturas fijas.

[†]En términos mas generales se dice que un fluido está en equilibrio hidrostático si $d\mathbf{v}/dt = 0$. Esto significa que los distintos constituyentes del fluido se encuentran en *equilibrio mecánico* y por lo tanto la fuerza neta entre los mismos es cero. Por ejemplo, una nube de gas puede estar en equilibrio hidrostático y aún así presentar movimiento de las distintas partículas de fluido en su interior.

Para ver la variación con la altura resolvamos la tercera ecuación que aparece en la ec.(22.2). Como $\partial p/\partial z$ es la razón de cambio de la presión con respecto a la posición z dejando a x y a y constantes (a una misma altura) entonces escribámosla por el momento como dp/dz (teniendo en mente que x y y son constantes para no confundirnos). Entonces la tercera igualdad de la ec.(22.2) se puede escribir como:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (22.3)$$

Integrando ambos lados de esta ecuación en dz para dos alturas (1 y 2) se obtiene que

$$\int_1^2 \frac{dp}{dz} dz = - \int_1^2 \rho g dz.$$

o lo que es lo mismo

$$p_2 - p_1 = g \int_2^1 \rho dz. \quad (22.4)$$

ya que g tiene el valor constante de $\sim 10 \text{ m/s}^2$ sobre la superficie de la tierra. Como sucede frecuentemente la densidad ρ no varía mucho con la altura z y por lo tanto es posible considerarla constante, de esta manera, la ec.(22.4) puede ser integrada para obtener:

$$p_2 - p_1 = \rho g (z_1 - z_2). \quad (22.5)$$

Este resultado ya había sido obtenido en la ec.(16.1) mediante otro camino: la presión de un fluido con densidad constante bajo la influencia del campo gravitacional terrestre varía de manera lineal con la altura.

Nuestro próximo ejemplo de hidrostática es un poco mas complicado y requiere que repasemos rápidamente conceptos ya vistos en cursos de geometría y gravitación.

Primeramente recordemos que un ángulo θ es definido de tal manera que $r\theta = l$, donde r es el radio de un círculo y l es su circunferencia (cf fig.II.4). De esta manera cuando θ gira totalmente alrededor del círculo se obtiene un ángulo de 2π . De manera diferencial podríamos haber dicho que el ángulo θ es tal que $r d\theta = dl$ y por lo tanto integrando ambos lados de la igualdad alrededor de todo el círculo $\theta_{\text{tot}} = \int d\theta = \int (dl/r) = (\int dl)/r = (2\pi r)/r = 2\pi$ puesto que r es constante al integral sobre la circunferencia l y el perímetro del círculo es igual a π veces el diámetro.

Las complicaciones comienzan justamente cuando se quiere generalizar el concepto de ángulo. Supongamos que estamos dentro de una trayectoria cerrada como la que se muestra en la fig.(II.4), entonces podemos definir al ángulo pequeño $d\theta$ mediante la relación $Rd\theta = dL$. De esta manera el ángulo θ al girar sobre toda la curva está dado por:

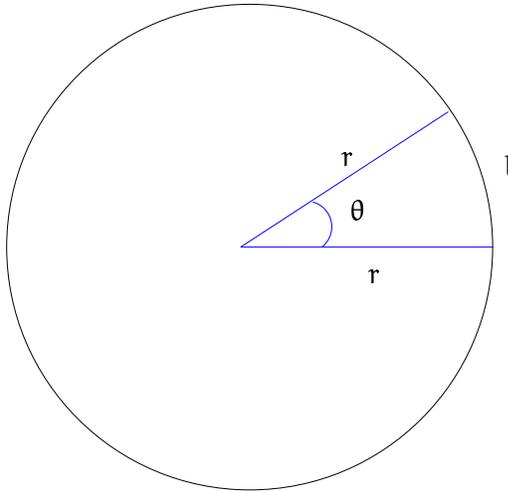


Figura II.4: El ángulo θ se define como $r\theta = l$, donde r es el radio de un círculo y l un pedazo de su circunferencia como lo muestra la figura.

$$\theta = \int d\theta = \int \frac{dL}{R}. \tag{22.6}$$

Si ahora alrededor del origen desde el cual se mide el radio R dibujamos una circunferencia de radio r entonces $rd\theta = dl$ y por lo tanto $d\theta = dl/r = dL/R$. Sustituyendo este valor en la ec.(22.6) se obtiene que $\theta = \int dL/R = \int dl/r = 2\pi$. Si el origen se encuentra fuera de la curva en cuestión es claro que habrá el mismo número de integraciones de dl/r hacia un lado (digamos hacia arriba) y hacia otro (digamos hacia abajo) y por lo tanto la integración da cero[†]. Aquí hemos utilizado el hecho de que la mejor integral es la que no se hace. Es una de las leyes fundamentales de la física y no debes olvidarla jamás.

Ahora bien, definamos la generalización de un ángulo en el espacio de tres dimensiones. Decimos que el *ángulo sólido* Ω está definido de tal forma que sobre la esfera de radio r se cumple que $r^2 d\Omega = da$, donde da es un diferencial de área alrededor del radio vector r que intersecta con la esfera (cf fig.(II.6)).

De la misma manera que para el ángulo convencional, calculemos cuanto vale el ángulo sólido si giramos alrededor la esfera:

$$\Omega = \int_{\text{Esfera}} d\Omega = \oint_{\text{Esfera}} \frac{da}{r^2} = \frac{1}{r^2} \oint da = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi. \tag{22.7}$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que el radio r no varía al integrar sobre la esfera y que el área de la esfera es cuatro π veces el cuadrado del radio.

De manera análoga al caso del ángulo normal puede mostrarse (¡hazlo!) que el ángulo sólido total medido desde dentro de una superficie cualquiera es igual a 4π . Si se está fuera de la superficie el valor

[†] Esto es equivalente a integrar dl/r desde θ_0 en dirección de las manecillas del reloj hasta llegar a θ_f y después regresar en sentido contrario de las manecillas del reloj hasta llegar hasta θ_0 . El resultado de esta integral es evidentemente cero.

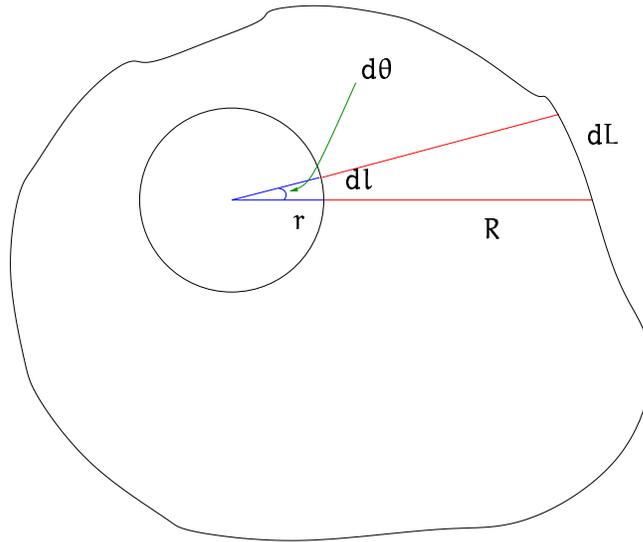


Figura II.5: El ángulo $d\theta$ se define como $Rd\theta = dL$, donde R es la norma del radio vector \mathbf{R} medido desde un origen O cualquiera y que va hasta la frontera con una curva cualquiera como la que se muestra en la frontera. Es claro y fácil de mostrar (ver texto) que el ángulo total θ que se obtiene al girar sobre toda la curva cerrada es claramente 2π si el origen se encuentra dentro de la curva y tiene el valor cero si el origen se encuentra fuera de la trayectoria cerrada.

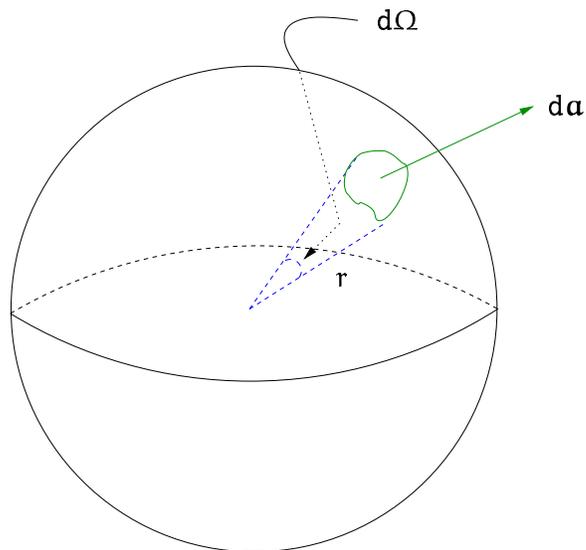


Figura II.6: El ángulo sólido Ω se define como $r^2 d\Omega = da$, donde r es el radio de una esfera y da un pedazo de su área alrededor del radio vector \mathbf{r} que emana desde el centro de la misma.

del ángulo sólido total es cero.

Ahora utilicemos el concepto de ángulo sólido para mostrar una de las relaciones mas famosas en el caso de gravitación clásica. Para esto recordemos que la fuerza gravitacional entre dos partículas de prueba está dada por

$$\mathbf{F} = -G \frac{m m' (\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (22.8)$$

En esta expresión los radio vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' apuntan desde un origen cualquiera hacia las masas m y m' respectivamente. La fuerza \mathbf{F} que aparece en la ec.(22.8) es la fuerza de atracción que sobre m se efectúa debido a la presencia de la masa m' . La fuerza inversa está dada por $-\mathbf{F}$. El *campo de aceleración gravitacional* \mathbf{g} o simplemente el *campo gravitacional* se define como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \lim_{m \rightarrow 0} \mathbf{F} = -G \frac{m' (\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (22.9)$$

De esta manera al tomar el límite cuando $m \rightarrow 0$ la influencia de esta masa m no afecta a la fuerza gravitacional producida por la masa m' . Esta es la maravillosa razón por la cual hemos tomado este límite un tanto cuanto confuso. Así podemos analizar la aceleración del campo gravitacional \mathbf{g} en cualquier punto del espacio que afectaría a una *masa de prueba* m infinitesimalmente pequeña.

El campo gravitacional es tal que $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, donde $\phi(\mathbf{r}, t)$ es el *potencial gravitacional* y es un campo escalar. Para el caso de la ec.(22.9) este mismo está dado por (¡demuéstralo recordando que las derivadas que aparecen en el $\nabla\phi$ son derivadas con respecto a las coordenadas no primadas y no con respecto a las coordenadas primadas !):

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -G \frac{m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (22.10)$$

En el caso de un cuerpo (digamos un gas, como el sol) el campo gravitacional producido por el mismo está dado por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = -G \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (22.11)$$

donde la integral se lleva acabo con respecto a las variables primadas. Por ejemplo $dV' = dx'dy'dz'$ y $\mathbf{r} = (x', y', z')$ en coordenadas cartesianas. Esta integral es tomada a lo largo de todo el volumen que ocupe el cuerpo en cuestión (si se trata del sol, la integral se efectúa a lo largo de todo el sol). De la misma manera, el potencial gravitacional puede escribirse como:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -G \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (22.12)$$

Calculemos ahora el flujo del campo gravitacional a través de un área arbitraria:

$$\begin{aligned}\oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{g} &= -G \oint d\mathbf{a} \cdot \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \\ &= -G \int dV' \rho(\mathbf{r}') \oint d\mathbf{a} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}.\end{aligned}\quad (22.13)$$

En el último paso de la ec.(22.13), el integrando de la última integral tiene toda la paja de ser un ángulo sólido (área sobre radio al cuadrado). De hecho, como \mathbf{r}' es un vector cuya flecha acaba justamente en uno de los elementos del volumen en consideración (las masas) entonces el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ apunta de la flecha de \mathbf{r}' a la flecha de \mathbf{r} . Pero la punta de flecha del vector \mathbf{r} pega justamente en la superficie sobre la cual estamos calculando el flujo en la ec.(22.13). De esta manera el integrando de la ec.(22.13) en cuestión representa el ángulo sólido medido a partir de la punta del vector \mathbf{r}' . Si \mathbf{r}' está dentro (es decir, la masa –digamos el sol– se encuentra dentro) del área sobre la cual se está calculando el flujo, entonces la última integral del lado derecho de la ec.(22.13) tiene el valor de 4π . En caso contrario (la masa en cuestión está fuera del área sobre la cual se está integrando) el valor de esta integral es cero. Supongamos que el área en consideración contiene a la masa de fluido. De esta manera, la ec.(22.13) se reduce a:

$$\begin{aligned}\oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{g} &= -4\pi G \int dV' \rho(\mathbf{r}'), \\ &= -4\pi GM,\end{aligned}\quad (22.14)$$

donde M es la masa total del fluido en consideración (la masa del sol).

Ahora bien, la ec.(12.6) nos permite definir al divergente de una función de una manera muy general, pues en el caso de volúmenes muy pequeños la ec.(12.6) puede escribirse simplemente como:

$$\text{div } \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}}{\Delta V}.\quad (22.15)$$

Esta es una definición muy formal y un poco confusa. De haber introducido al divergente de esta manera, nadie hubiésemos entendido que hacer con el mismo. Evidentemente, una definición equivalente puede obtenerse para el rotacional. Basta con que le des una mirada a la ec.(12.12) (¿puedes hacerlo?).

Utilizando la ec.(22.15) y la ec.(22.14) se obtiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{M}{\Delta V} = -4\pi G \rho.\quad (22.16)$$

Utilizando este resultado y la definición de potencial gravitacional ($\mathbf{g} = -\text{grad } \phi$) se obtiene la *ecuación de Poisson* para el caso gravitacional[†]:

[†]En el caso en que hubiésemos calculado el flujo del campo gravitacional sobre un área que no contenía a la masa

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (22.18)$$

Consideremos ahora una masa gaseosa grande, como la estrella de masa de gas que nos alumbra todos los días en nuestro planeta tierra: el sol. En equilibrio hidrostático la ec.(22.1) es válida y por lo tanto:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \phi. \quad (22.19)$$

Tomando el divergente de ambos lados de esta ecuación y utilizando la ec.(22.18) se obtiene que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) = -4\pi G \rho. \quad (22.20)$$

Si consideramos que la estrella no está rotando, entonces su forma será esférica al estar en equilibrio hidrostático. De esta manera todas las cantidades termodinámicas como la presión y la densidad son funciones únicamente del radio r medido desde el centro de la estrella. En otras palabras, las cantidades hidrodinámicas poseen *simetría esférica*.

De esta forma, la manera mas sencilla de expandir la ec.(22.20) es utilizando coordenadas esféricas (cf ec.(4.3)). Para calcular el valor del gradiente y el divergente en coordenadas esféricas debe de utilizarse la regla de transformación dada por la ec.(4.3) y después utilizar la regla de la cadena. Esto es muy tedioso y vale mas la pena utilizar la cabeza antes de calcular.

De la ec.(4.3) se sigue que:

$$dl = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \hat{e}_\varphi, \quad (22.21)$$

donde los vectores unitarios \hat{e}_r , \hat{e}_θ , \hat{e}_φ son ortogonales entre sí y por tanto apuntan en las direcciones radial (r), polar (θ) y azimutal (φ) respectivamente. Estos vectores forman una base para el espacio Euclidiano en coordenadas esféricas (los vectores unitarios en la dirección x , y , y z también forman una base para el espacio Euclidiano).

La diferencial de una función ϕ en coordenadas esféricas está dada por:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\varphi, \quad (22.22)$$

pero de acuerdo a la ec.(9.2), esta diferencial debe ser igual al gradiente de ϕ contraído con la diferencial del vector posición:

entonces la ec.(22.16) hubiese sido $\nabla \cdot \mathbf{g} = 0$ y por lo tanto

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (22.17)$$

La ec.(22.17) se conoce como la ecuación de Laplace para el campo gravitacional. Esta ecuación es válida para todos aquellos puntos en los cuales no hay masa (vacío). La ecuación de Poisson (ec.(22.18)) por el contrario es válida para todos aquellos puntos del espacio en los cuales existe masa. Es claro que la ecuación de Poisson es la que nos interesa en el caso de un fluido pues “describe” el interior del mismo.

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{l}. \quad (22.23)$$

Sustituyendo la ec.(22.21) y la ec.(22.22) en la ec.(22.23) se ve que necesariamente el gradiente en coordenadas esféricas está dado por:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi. \quad (22.24)$$

En el caso cartesiano, el elemento de longitud $d\mathbf{l}$ está dado por

$$d\mathbf{l} = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z, \quad (22.25)$$

ya que $\mathbf{l} = (x, y, z)$. En este mismo caso, el elemento de área $d\mathbf{a}$ dado por:

$$d\mathbf{a} = dydz\hat{e}_x + dx dz\hat{e}_y + dx dy\hat{e}_z. \quad (22.26)$$

Esto corresponde a las caras de un elemento de volumen en forma de cubo las cuales son paralelas a los planos $0xy$, $0xz$, y $0yz$ respectivamente.

Como elemento de volumen en coordenadas cartesianas utilizamos un volumen infinitesimal con caras paralelas a los planos $0xy$, $0xz$ y $0yz$ dado por:

$$dV = dx dy dz. \quad (22.27)$$

Las ecs.(22.25)-(22.27) pueden escribirse respectivamente como:

$$d\mathbf{l} = dl_1\hat{e}_1 + dl_2\hat{e}_2 + dl_3\hat{e}_3, \quad (22.28)$$

$$d\mathbf{a} = dl_2 dl_3 \hat{e}_1 + dl_1 dl_3 \hat{e}_2 + dl_1 dl_2 \hat{e}_3, \quad (22.29)$$

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3, \quad (22.30)$$

donde para el caso cartesiano $dl_k = dx_k$ ($k = 1, 2, 3$) y los vectores \hat{e}_k apuntan en la direcciones x , y , y z como es costumbre.

Comparando la ec.(22.21) con la ec.(22.28) se obtiene que en el caso de las coordenadas esféricas $dl_1 = dr$, $dl_2 = r d\theta$, $dl_3 = r \sin\theta d\varphi$ y también $\hat{e}_1 = \hat{e}_r$, $\hat{e}_2 = \hat{e}_\theta$, $\hat{e}_3 = \hat{e}_\varphi$. Sustituyendo estos valores en las ecs.(22.29)-(22.30) se obtienen los valores para la diferencial de área y la diferencial de volumen en coordenadas esféricas:

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{e}_r + r \sin\theta dr d\varphi \hat{e}_\theta + r dr d\theta \hat{e}_\varphi, \quad (22.31)$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi. \quad (22.32)$$

Utilizando entonces la ec.(22.15) y las ecs.(22.31)-(22.32) el divergente de la función vectorial $\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{e}}_r + F_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + F_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ está dado por:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \{ (r^2 \sin \theta F_r) d\theta d\varphi + (r \sin \theta F_\theta) dr d\varphi + (r F_\varphi) dr d\theta \}}{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}. \quad (22.33)$$

El primer término de la integral se calcula recordando que para un volumen suficientemente pequeño, la integral de área está dada por la suma del valor de la función sobre el área dada. En otras palabras:

$$\oint r^2 \sin \theta F_r \approx (r^2 \sin \theta F_r)_1 - (r^2 \sin \theta F_r)_2. \quad (22.34)$$

Donde el integrando de la ec.(22.34) ha sido evaluado en la cara anterior y posterior que corresponde al elemento de volumen en la dirección radial. El signo menos en el segundo término del lado derecho de la ec.(22.34) se obtiene debido a que las áreas en una cara y en la opuesta de una superficie cerrada apuntan en sentidos contrarios. Haciendo una expansión de Taylor del primer término del lado derecho de la ec.(22.34) se llega a que:

$$\begin{aligned} \oint r^2 \sin \theta F_r d\theta d\varphi &\approx \left\{ \overbrace{(r^2 \sin \theta F_r)_2} + dr \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta F_r) - \overbrace{(r^2 \sin \theta F_r)_2} \right\} d\theta d\varphi. \\ &\approx d\theta d\varphi dr \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta F_r). \end{aligned} \quad (22.35)$$

De manera totalmente análoga se obtiene para las integrales restantes que:

$$\oint (r \sin \theta F_\theta) dr d\varphi \approx d\theta d\varphi dr \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta F_\theta), \quad (22.36)$$

$$\oint (r F_\varphi) dr d\theta \approx d\theta d\varphi dr \frac{\partial}{\partial \varphi} (r F_\varphi). \quad (22.37)$$

Sustituyendo las ecs.(22.35)-(22.37) en la ec.(22.33) y tomando el límite cuando el volumen tiende a cero se obtiene el valor del divergente en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r F_\varphi) \right\}, \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + r \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (22.38)$$

Regresemos nuevamente a nuestro problema: el equilibrio hidrostático de una estrella que posee simetría esférica. La ec.(22.20) puede reducirse a una forma mas sencilla utilizando el hecho de que la presión y la densidad dependen únicamente de la coordenada radial r . De aquí y con ayuda de la ec.(22.24) y la ec.(22.38) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
-4\pi G\rho &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right), \\
&= \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \hat{e}_r \right), \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \right).
\end{aligned} \tag{22.39}$$

Como solamente existe dependencia radial r en las cantidades hidrodinámicas, las parciales con respecto a r pueden escribirse como derivadas totales y así:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \tag{22.40}$$

Esta es la ecuación que buscamos. Representa la condición de equilibrio hidrostático (equilibrio mecánico) que una estrella debe poseer considerando simetría esférica.

Existe una forma excesivamente sencilla de llegar a la ec.(22.40). Para esto, consideremos la masa $m(r)$ contenida dentro del cascarón con radio r . Esta masa está dada por[†]:

$$\begin{aligned}
m(r) &= \int \rho dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \rho(r) dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho(r) dr \\
&= 4\pi \int_0^r \rho(r) dr.
\end{aligned} \tag{22.41}$$

Y por lo tanto:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \tag{22.42}$$

En el caso de flujo estacionario y con simetría radial, la ecuación de Euler, ec.(21.13), es simplemente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -G \frac{m(r)}{r^2}. \tag{22.43}$$

Multiplicando esta última ecuación por r^2 y derivando con respecto a r se obtiene:

[†]Incidentalmente el elemento de área $\sin \theta d\theta d\varphi$ es justamente igual al elemento de ángulo sólido $d\Omega$. Esto se sigue de la definición de ángulo sólido y de la ec.(22.31). De aquí se sigue entonces que la integral del elemento de área $\sin \theta d\theta d\varphi$ sobre toda la esfera deba ser igual a 4π .

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 dp}{\rho dr} \right) = -4\pi G \rho r^2. \quad (22.44)$$

que es justamente la ec.(22.40).

§23. Teorema de Bernoulli

En esta sección mostraremos el equivalente de la conservación de la energía para un caso particular de un fluido ideal: un fluido estacionario. Se dice que un fluido es estacionario si el campo de velocidades no depende explícitamente del tiempo, es decir, si $\partial v / \partial t = 0$. De aquí se sigue (utilizando la ecuación de estado del gas) que (¡demuéstralo!) un fluido es estacionario si todas las cantidades hidrodinámicas no dependen del tiempo (ie $\partial / \partial t = 0$).

Consideremos primero el caso de una partícula libre en mecánica newtoniana. La ecuación de movimiento (ley de Newton) de una partícula libre (ie fuerza total que actúa sobre la partícula igual a cero) de masa m está dada por:

$$m \frac{dv}{dt} = 0. \quad (23.1)$$

Tomando el producto interno de esta ecuación con el vector v se obtiene que $v \cdot dv/dt = (1/2)dv^2/dt = 0$. Por lo tanto, la cantidad $v^2/2 = \text{const}$ a lo largo del recorrido de la partícula. La cantidad $v^2/2$ se denomina la *energía cinética por unida de masa* de la partícula y así se llega a que la energía cinética es una constante a lo largo de la trayectoria de una partícula libre, sobre la cual no actúa ninguna fuerza.

Compliquemos un poco las cosas y pensemos en el caso de una partícula de masa m que se mueve a lo largo de un campo gravitacional con aceleración $g = -\nabla\phi$, donde ϕ es el potencial escalar gravitacional. De esta manera, la ecuación de Newton está dada por:

$$m \frac{dv}{dt} = mg = -m\nabla\phi. \quad (23.2)$$

Multiplicación escalar de esta ecuación con el vector velocidad implica que:

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = -v \cdot \nabla\phi. \quad (23.3)$$

Integrando en el tiempo t (el tiempo en recorrer la trayectoria en cuestión desde la posición inicial a la final) se obtiene:

$$\frac{1}{2} \int dv^2 = - \int dt v \cdot \nabla\phi = - \int dr \cdot \nabla\phi = - \int d\phi,$$

pues $dr/dt = v$. De esta manera, se obtiene que la cantidad:

$$\frac{1}{2}v^2 + \phi = \text{const}, \quad (23.4)$$

a lo largo de la trayectoria de la partícula en cuestión. La ec.(23.3) representa la ecuación de conservación de la energía. Es por esta razón que al campo escalar ϕ se le denomina la energía potencial (por unidad de masa) del sistema o mas sencillamente el *potencial gravitacional*.

En el caso de la hidrodinámica, la ecuación de movimiento está dada por la ecuación de Euler, ec.(21.13). Antes de multiplicar a esta ecuación escalarmente por v vamos a mostrar dos resultados que nos serán de utilidad.

Primeramente, calculemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) &= v_k \hat{\mathbf{e}}_k \wedge \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l} \epsilon_{lmp} \hat{\mathbf{e}}_p \right), \\ &= v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \epsilon_{lmp} \epsilon_{kpr} \hat{\mathbf{e}}_r, \\ &= -v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \epsilon_{lmp} \epsilon_{krp} \hat{\mathbf{e}}_r, \\ &= -v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \det \begin{bmatrix} \delta_{lk} & \delta_{mk} \\ \delta_{lr} & \delta_{mr} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r \\ &= -v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_l} (\delta_{lk} \delta_{mr} - \delta_{lr} \delta_{mk}) \hat{\mathbf{e}}_r \\ &= -v_l \frac{\partial v_r}{\partial x_l} \hat{\mathbf{e}}_r + v_m \frac{\partial v_m}{\partial x_r} \hat{\mathbf{e}}_r \\ &= \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Esta relación es casi como el triple producto vectorial (pues ∇ es un vector) excepto por el factor de $1/2$ que aparece en el lado derecho de la ec.(23.5). Esto se debe a que a pesar de que ∇ es un vector, es un vector especial: es un vector que opera sobre lo que está a su derecha y de hecho, opera derivando. En otras palabras, este vector no cumple con todas las reglas operacionales de los vectores convencionales. ¡No lo olvides!

Segundamente, la segunda ley de la termodinámica está dada por:

$$d\epsilon = Tds - pd \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (23.6)$$

donde ϵ es la *energía interna específica* (ie energía interna por unidad de masa), s es la *entropía específica*, $1/\rho$ es el *volumen específico*, T la temperatura y p la presión del sistema en consideración.

La ec.(23.6) puede escribirse como:

$$dw = Tds + \left(\frac{1}{\rho} \right) dp, \quad (23.7)$$

donde $w = \epsilon + p/\rho$ es conocida como la *entalpía* del sistema o la *función de calor*. La ec.(23.7) es otra manera de escribir la primera ley de la termodinámica y es la que utilizaremos frecuentemente[†].

Antes de multiplicar a la ecuación de Euler escalarmente por v sustituyamos la ec.(23.5) en la ec.(21.13) para obtener:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - v \wedge (\nabla \wedge v) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi. \quad (23.10)$$

Consideremos ahora que el flujo es adiabático, entonces la ec.(23.10) con ayuda de la ec.(23.9) queda como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - v \wedge (\nabla \wedge v) = -\nabla\omega - \nabla\phi. \quad (23.11)$$

Si tomamos el producto interno de la ec.(23.11) con el vector v se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{1}{2}v \cdot \nabla v^2 - \cancel{v \cdot \{v \wedge (\nabla \wedge v)\}} = -v \cdot \nabla(\omega + \phi). \quad (23.12)$$

El tercer término del lado derecho de la ec.(23.12) se anula puesto que el vector $v \wedge$ (lo que sea) es ortogonal con v , de tal forma que el producto escalar con v con este vector es cero.

Supongamos ahora que el flujo es estacionario. Así la ec.(23.12) puede escribirse como:

$$\hat{v} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{2}v^2 + \omega + \phi \right\} = 0. \quad (23.13)$$

Introduzcamos ahora el concepto de *líneas de corriente*. Estas líneas son tales que el campo de velocidades del fluido es tangente a las mismas. Matemáticamente esto significa que las ecuaciones de las líneas de corriente ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) están dadas por[‡]:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (23.14)$$

En el caso de flujo estacionario las líneas de corriente representan las trayectorias de las partículas de fluido al moverse. Este no es el caso para flujo no estacionario. En el caso de un flujo no estacionario las líneas de corriente representan la dirección de la velocidad de las distintas partículas de fluido a un tiempo dado. En el transcurso del tiempo estas líneas se mueven (incluso en posiciones fijas) y por lo tanto no representan la trayectoria de las partículas de fluido.

[†]Otra manera de escribir la ec.(23.7) es la siguiente. Dividamos a esta ecuación por ∂x_k para obtener:

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = T \frac{\partial s}{\partial x_k} + \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial p}{\partial x_k}. \quad (23.8)$$

En otras palabras:

$$\nabla w = T \nabla s + \left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla p, \quad (23.9)$$

[‡]Aquí lo que mas conviene recordar es que de la definición de velocidad se sigue que $dt = dx_k/v_k$ (¡no suma implícita!).

De la ec.(23.13) se sigue entonces que como $\hat{v} \cdot \text{grad}$ es la derivada en la dirección de \hat{v} entonces la cantidad:

$$\frac{1}{2}v^2 + \omega + \phi = \text{const}, \quad (23.15)$$

sobre una línea de corriente. Este resultado se conoce como la *ley de Bernoulli* o el *teorema de Bernoulli* o la *ecuación de Bernoulli*. Es importante mencionar que la cantidad del lado izquierdo de la ec.(23.14) es constante, para la trayectoria de una partícula dada. En otras palabras, esta constante varía entre distintas líneas de corriente. El significado de la ecuación de Bernoulli es claro. Basta con recordar que la entalpía por unidad de masa está dada por $w = \epsilon + p/\rho$. De esta manera, la ec.(23.14) significa que la suma de la energía cinética por unidad de masa $v^2/2$ mas la energía interna específica ϵ mas el trabajo por unidad de masa hecho para mover la partícula de fluido de una posición inicial a una final p/ρ (recuerda que el trabajo hecho en expandir un gas de manera adiabático es igual a pV) mas la energía potencial por unidad de masa ϕ es una cantidad conservada a lo largo de una línea de corriente. De esta manera, la ecuación de Bernoulli resulta una de las identidades mas importantes en la mecánica de fluidos pues representa la *conservación de la energía* para fluidos ideales y estacionarios.

Tarea 6

(1) **Flujo de energía.** La energía por unidad de volumen en un fluido está dada por (energía cinética mas energía interna): $\rho v^2/2 + \rho \epsilon$.

(a) Muestra que la tasa de cambio de la energía cinética por unidad de masa (su derivada parcial con respecto al tiempo) está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}), \quad (23.16)$$

utilizando la ecuación de continuidad, ec.(20.5), y la ecuación de Euler, eq.(21.13), sin considerar el término gravitacional, ie $\mathbf{g} = 0$.

(b) Utiliza la ec.(23.5) y la ec.(23.9) para llevar a la ec.(23.16) a la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s. \quad (23.17)$$

(c) Muestra utilizando la primera ley de la termodinámica, ec.(23.6) y la ecuación adiabática, ec.(21.14), que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) = \omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s. \quad (23.18)$$

¡No olvides que $\omega = \epsilon + p/\rho$!

(d) Combina la ec.(23.17) con la ec.(23.18) y muestra que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = - \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right),$$

para finalmente obtener

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = - \nabla \cdot \left\{ \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \right\}. \quad (23.19)$$

Esta ecuación es como una ecuación de continuidad para la energía. El vector $\rho \mathbf{v} (v^2/2 + \omega)$ se denomina el vector de densidad de energía de flujo[†].

El hecho de que en el lado derecho de la ec.(23.19) aparezca la entalpía específica w y no la energía interna se debe simplemente a lo siguiente. Si escribimos $\omega = \epsilon + p/\rho$ entonces el lado derecho de la ec.(23.19) queda como: $-\int \rho \mathbf{v} (v^2/2 + \epsilon) \cdot d\mathbf{a} - \int p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$. El primer término representa la energía cinética e interna que se transporta a través de la superficie por unidad de tiempo, por unidad de masa del fluido. El segundo término es el trabajo (PV) por unidad de tiempo que realizan las fuerzas de presión sobre el fluido dentro de la superficie.

(II) **Flujo de momento.** La dirección i -ésima del momento por unidad de masa en un fluido está dada por ρv_i .

(a) Utilizando la ecuación de continuidad, ec.(20.5) y la ecuación de Euler, ec.(21.13) con $\mathbf{g} = 0$ ambas escritas en su forma de suma implícita, muestra que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k). \quad (23.22)$$

(b) De la misma manera que como hicimos para mostrar el teorema de Gauss para un escalar en

[†] Para entender el significado físico de esta ecuación basta hacer lo mismo que en el caso de la ecuación de continuidad. Si integramos la ec.(23.19) sobre un volumen V arbitrario entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon \right) dV = - \int \nabla \cdot \left\{ \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \right\} dV.$$

Transformando la integral de volumen del lado derecho de esta ecuación a una integral de superficie (la superficie frontera del volumen en consideración) mediante el uso del teorema de Gauss se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon \right) dV = - \oint d\mathbf{a} \cdot \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right). \quad (23.20)$$

El lado izquierdo de esta ecuación representa la tasa de cambio de la energía de un fluido contenido en un volumen dado. El lado derecho es necesariamente la cantidad de energía que fluye hacia fuera de este volumen por unidad de tiempo. Por esta razón la cantidad:

$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \omega \right) \quad (23.21)$$

se denomina el *vector de densidad de flujo de energía*. La magnitud de este vector representa la cantidad de energía que pasa por la superficie, por unidad de tiempo por unidad de área perpendicular a la velocidad v .

la ec.(21.5), escribe $\partial p / \partial x_i = \delta_{ik} \partial p / \partial x_k$ y demuestra que la ec.(23.22) puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (23.23)$$

donde el tensor Π_{ik} está definido por

$$\Pi_{ik} \equiv p \delta_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (23.24)$$

Esta ecuación representa una ecuación de continuidad para el momento del fluido. El tensor Π_{ik} se denomina el tensor de densidad de flujo de momento[†].

La energía total de un gas es un escalar y la densidad de energía es un vector (ρv). El momento ρv de un fluido por unidad de masa es un vector y la densidad de flujo de momento es un tensor Π_{ik} . Esto es de esperarse si es que vamos a construir una ecuación de continuidad para la energía y otra para el momento[‡].

§24. Conservación de la circulación

La integral de línea

$$\Gamma \equiv \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}, \quad (24.1)$$

tomada alrededor de un circuito cerrado se denomina la *circulación de la velocidad* como habíamos visto en la sección §10.

Consideremos ahora que el circuito que aparece en la integral de la ec.(24.1) es un circuito constituido por partículas de fluido. Así, el circuito se moverá en el transcurso del tiempo con el fluido. Calculemos la derivada:

[†]Para entender el significado del tensor Π_{ik} integremos a la ec.(23.24) sobre un volumen y apliquemos el teorema de la divergencia, obteniendo así:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = - \oint \Pi_{ik} da_k. \quad (23.25)$$

El lado izquierdo de la ec.(23.25) representa la tasa de cambio de la componente i -ésima del momento contenido dentro del volumen en consideración. Necesariamente el lado derecho de esta ecuación debe ser la cantidad de momento que fluye hacia afuera a través de la superficie frontera por unidad de tiempo. Así, la cantidad $\Pi_{ik} da_k$ es la i -ésima componente del momento que fluye a través del elemento de superficie da . Si escribimos $da_k = \hat{n}_k da$, donde \hat{n} es un vector unitario en la dirección del elemento de área da entonces el vector

$$\Pi_{ik} \hat{n}_k = p \hat{n}_i + \rho v_i v_k \hat{n}_k. \quad (23.26)$$

representa el flujo de la i -ésima componente del momento por unidad de área.

De esta manera el tensor Π_{ik} representa la i -ésima componente de la cantidad de momento que fluye por unidad de tiempo, por unidad de área perpendicular al eje x_k .

[‡]La ec.(23.19) y la ec.(23.23) pueden reemplazar a la ecuación de continuidad de masa, ec.(20.5), y a la ecuación de Euler, ec.(21.9). El número total de estas ecuaciones es de 1 (ec.(23.19)) + 3 (tres componentes de la ec.(23.23)). Combinando a estas con la ecuación adiabática, ec.(21.14) se obtiene un total de cinco ecuaciones, las cinco ecuaciones necesarias y suficientes para resolver el problema de la hidrodinámica en cuestión.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}) \quad (24.2)$$

donde hemos escrito a la diferencial $d\mathbf{l}$ como $\delta\mathbf{l}$ para evitar confusiones. En este caso, como el elemento de línea $\delta\mathbf{l}$ se mueve con el fluido (pues es parte del mismo), entonces la derivada con respecto al tiempo que aparece dentro de la integral en el lado derecho de la ec.(24.2) afecta no solamente a la velocidad \mathbf{v} sino también a la diferencial $\delta\mathbf{l}$. De hecho,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{l}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{l} + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} (\delta\mathbf{l}). \quad (24.3)$$

pero como la derivada y la diferencial son límites, entonces si el límite existe, podemos intercambiar el operador d/dt por δ . Así pues, la ec.(24.3) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{l}) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{l} + \mathbf{v} \cdot \delta \frac{d\mathbf{l}}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{l} + \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \\ &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{l} + \delta \mathbf{v}^2. \end{aligned} \quad (24.4)$$

El penúltimo paso de la ec.(24.4) se sigue del hecho de que como $d\mathbf{l}$ es un elemento de línea de fluido, entonces la cantidad $d\mathbf{l}/dt$ es precisamente la velocidad \mathbf{v} del fluido en ese punto.

Sustituyendo la ec.(24.4) en la ec.(24.2) se obtiene que:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{l} + \oint \delta \mathbf{v}^2. \quad (24.5)$$

El último término del lado derecho de la ec.(24.5) se cancela debido a que la integral de una diferencial total sobre un circuito cerrado es cero como vimos en la ec.(10.6).

En el caso de un fluido adiabático, la ecuación de Euler está dada por:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\omega, \quad (24.6)$$

de acuerdo a la ec.(21.9) y la ec.(23.9). Sustituyendo la ec.(24.6) en la ec.(24.5) se obtiene que

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint \delta\mathbf{l} \cdot \nabla\omega = \oint \delta\omega = 0. \quad (24.7)$$

De esta manera, hemos llegado al resultado importante, conocido como el *teorema de Kelvin de la conservación de la circulación*: "para un fluido ideal, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno hecho de fluido es una constante:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{rot} \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \text{const} , \quad (24.8)$$

donde el paso intermedio fue obtenido al aplicar el teorema de Stokes a la integral del lado derecho en la ec.(24.8).

Tarea 7

- (I) Muestra que en el caso de un fluido ideal, el tomar el rotacional de la ecuación de Euler, eq.(21.13) implica que:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \text{rot} (v \wedge \Omega), \quad (24.9)$$

donde la vorticidad Ω del fluido está definida por $\Omega = \text{rot } v$. La ec.(24.10) va acompañada del hecho de que:

$$\text{div } \Omega = 0, \quad (24.10)$$

como vimos en la tarea 2.

Así como se habla de líneas de corriente, también puede hablarse de líneas de vorticidad. Estas se definen como las líneas que son tangentes al vector Ω para distintos puntos del espacio. Las líneas de vorticidad son siempre cerradas, o bien nunca terminan y van desde “menos infinito” hasta “mas infinito”. Esto se sigue inmediatamente de la ec.(24.10) pues $\int dV \nabla \cdot \Omega = \oint \Omega \cdot d\mathbf{a} = 0$ para cualquier volumen. Si existiera un lugar donde se estuvieran produciendo las líneas de vorticidad esta integral sería diferente de cero[†].

- (II) Muestra que para un circuito infinitesimal cerrado, el teorema Kelvin de la conservación de la circulación implica que:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \approx \Omega \cdot d\mathbf{a} = \text{const.} \quad (24.11)$$

El hecho de que el producto $\Omega \cdot d\mathbf{a}$ sea constante a lo largo de la trayectoria del fluido significa intuitivamente que la vorticidad se mueve en conjunto con el fluido. Dicho de otro modo, las líneas de vorticidad se mueven con el fluido[‡]. Los siguientes incisos te llevarán a mostrar esto.

- (III) Considera una superficie S de vorticidad, es decir una superficie que contiene líneas de vorticidad cuya tangente en cada punto es el vector Ω . Muestra utilizando la ec.(24.11) que a medida que el fluido se mueve (y por lo tanto la superficie S se estira, se estrecha y demás) la superficie S permanece como una superficie de vorticidad.

[†]En el caso del campo gravitacional, el equivalente de la ec.(24.10) es precisamente la ec.(22.16). Las líneas de campo gravitacional (ie líneas cuya tangente en cierto punto es el vector \mathbf{g}) comienzan en la frontera del cuerpo masivo. De hecho, si dibujamos las líneas de campo gravitacional para una partícula de masa m que se encuentra en el origen, estas líneas son radiales y apuntan hacia el origen. En otras palabras, las líneas convergen hacia el origen y por lo tanto su divergente es distinto de cero.

[‡]Por ejemplo, si marcamos una línea de vorticidad con tinta y dejamos que el fluido se mueva, la línea se moverá con el movimiento del fluido. La nueva posición de la línea marcará una nueva línea de vorticidad.

- (iv) Considera dos superficies de vorticidad que se intersectan en la línea AB como se muestra en la fig.(II.7). Con lo demostrado anteriormente muestra que cuando el fluido evoluciona en el tiempo la línea AB permanece en la intersección de ambas superficies y que por lo tanto es una línea de vorticidad. De aquí argumenta por qué la vorticidad se dice que se mueve con el fluido (otra manera de decirlo es que la vorticidad está congelada al fluido y por tanto se mueve con el mismo).
- (v) El hecho de que las líneas de vorticidad estén congeladas al fluido puede mostrarse de la siguiente manera, que es un tanto cuanto mas matemática.
- (a) Muestra con ayuda de la ecuación de continuidad, ec.(20.5), o de alguna otra manera, que la ec.(24.9) puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega}{\rho} \right) = \left(\frac{\Omega}{\rho} \cdot \nabla \right) v. \quad (24.12)$$

- (b) Considera ahora una línea de fluido. Un pedacito de esta línea está dado por $\delta \mathbf{l}$. Muestra que la variación del vector $\delta \mathbf{l}$ en un intervalo dt está dada por:

$$dt (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) v. \quad (24.13)$$

De aquí, muestra que:

$$\frac{d}{dt} (\delta \mathbf{l}) = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) v. \quad (24.14)$$

Esta relación representa la forma en la que el elemento de línea de fluido (o línea de corriente) varía con respecto al tiempo a medida que el fluido se mueve. Si comparas la ec.(24.14) con la ec.(24.12) es claro que el vector Ω/ρ obedece la misma relación que el vector $\delta \mathbf{l}$. Dicho de otra forma, ambos vectores varían de la misma manera. Por ejemplo, si Ω/ρ es paralelo con $\delta \mathbf{l}$ inicialmente, entonces siempre permanecerán paralelos entre sí.

- (c) Muestra que si A y B son dos partículas de fluido infinitesimalmente cercanas entre sí y que se encuentran sobre una línea de vorticidad, entonces A y B se encontrarán siempre en la línea de vorticidad a medida que el tiempo avanza y el fluido se mueve.

§25. Fluidos irrotacionales

Se dice que un fluido es irrotacional si la cantidad $\text{rot } v = 0$ en todo el fluido. Esto significa que la velocidad

$$v = \nabla \Psi, \quad (25.1)$$

para alguna función escalar Ψ que depende de la posición y del tiempo (cf sección §13). Este tipo de fluidos se denominan mas comúnmente *flujo potencial* pues existe una función potencial Ψ que describe

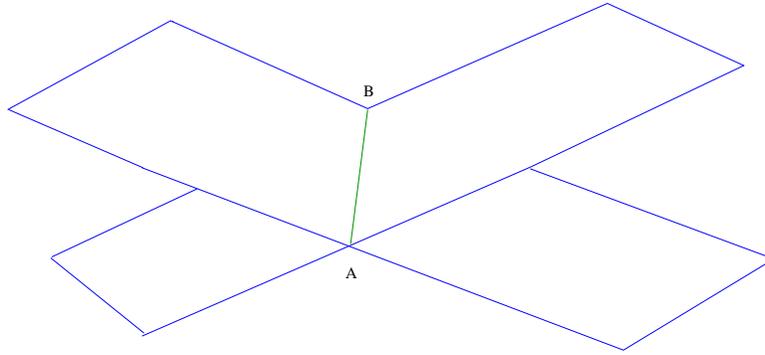


Figura II.7: Dos superficies de vorticidad se intersectan en la línea AB. Al evolucionar en el tiempo estas superficies permanecen como superficies de vorticidad y por lo tanto el segmento AB es una línea de vorticidad. De esta manera las líneas de vorticidad permanecen congeladas al fluido.

el comportamiento del fluido. Dicho de otro modo, Ψ es el *campo potencial escalar de velocidades*. Utilizando el teorema de la conservación de la circulación de Kelvin para fluidos ideales se sigue que si a un determinado tiempo t el fluido es tal que $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, entonces el flujo será irrotacional en todo tiempo. Esto no es cierto para flujos no-adiabáticos, pues la ley de la conservación de la circulación de Kelvin fue obtenida únicamente para fluidos ideales.

En el caso de flujo potencial, la circulación de la velocidad está dada por la siguiente integral:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \wedge \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad (25.2)$$

de acuerdo con el teorema de Stokes. Este resultado es muy importante. Lo que nos quiere decir es que “*en flujo potencial no existen líneas de corriente cerradas*”. Esto se debe a que como la tangente a las líneas de corriente es el vector velocidad \mathbf{v} , entonces la integral $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ tomada a lo largo de una línea de corriente no podría ser cero de ninguna manera.

Aquí hay que tener mucho cuidado con lo que significa flujo irrotacional. Por ejemplo, consideremos el sencillo caso en el que la velocidad es uniforme en todo el fluido. Es claro que la circulación de la velocidad sobre cualquier trayectoria del espacio es cero: $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{v} \cdot \oint d\mathbf{l} = 0$.

El siguiente ejemplo consiste en considerar el caso en el que la norma de la velocidad se mantiene constante, pero gira alrededor de, digamos el eje z , es decir, $\mathbf{v} = v\hat{e}_\varphi$ en coordenadas cilíndricas. Aquí el cálculo de la circulación es un poco más laborioso, así es que nos concentraremos mejor a calcular el rotacional del campo de velocidades utilizando el hecho de que para un elemento de área $d\mathbf{a} \equiv \hat{\mathbf{n}}da$ suficientemente pequeño, el teorema de Stokes (ec.(12.11)) implica que

$$(\nabla \wedge \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (25.3)$$

Tarea 8

Para el caso en el que la velocidad es constante en magnitud, pero varía de la forma $v = v\hat{e}_\varphi$ sobre todo el espacio,

- (I) Muestra que la circulación de la velocidad sobre cualquier circunferencia centrada en el origen es distinta de cero y calcula su valor exacto. Para esto, recuerda que un pedacito de círculo (elemento de línea) está dado por:

$$dl = r d\varphi \hat{e}_\varphi. \tag{25.4}$$

Utiliza el teorema de la conservación de la circulación de Kelvin para mostrar que la velocidad v es inversamente proporcional al radio r del círculo:

$$v \propto 1/r. \tag{25.5}$$

Utilizando la ec.(25.3), muestra que $\text{rot } v \neq 0$ en el origen.

- (II) Considera un circuito cerrado suficientemente pequeño de tal forma que dos de sus lados son pedazos de circunferencia centradas en el origen. Ambas circunferencias están separadas por un pedacito δr . Muestra que la circulación de la velocidad sobre este circuito es cero. De aquí, argumenta por qué el $\text{rot } v = 0$ en cualquier punto del espacio, excepto en el origen.

La tarea 8 y lo dicho anteriormente justifica el nombre de rotacional de un vector f a la cantidad $\epsilon_{klm} (\partial f_k / \partial x_l) \hat{e}_m$. Un campo vectorial posee rotacional diferente de cero en un punto si el campo “rota” alrededor del mismo[†].

En el caso de flujo potencial para un fluido ideal, la ec.(23.11) se escribe como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\nabla \omega - \nabla \phi. \tag{25.7}$$

Sustituyendo la ec.(25.1) para el primer término del lado izquierdo de la ec.(25.7) se obtiene que

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \omega + \phi \right\} = 0, \tag{25.8}$$

[†]De paso mencionemos el significado físico del divergente y a que se le atribuye su nombre. La ecuación de continuidad en su forma integral, ec.(20.4), significa que:

$$\frac{\partial}{\partial t} M = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV, \tag{25.6}$$

donde M es la masa total de fluido encapsulada por el volumen V . El lado izquierdo de la ec.(25.6) representa la variación en el tiempo de la masa de fluido dentro del volumen V . Si la masa disminuye es debido a la “divergencia” de fluido a través de las paredes de este volumen. Esta cantidad corresponde justamente al lado derecho de la ec.(25.6).

y por lo tanto

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \omega + \phi = \text{const} . \quad (25.9)$$

En el caso de un flujo estacionario ($\partial/\partial t = 0$), la ec.(25.9) se reduce a la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \omega + \phi = \text{const} . \quad (25.10)$$

Cabe hacer notar que la constante que aparece en la ec.(25.10) es una constante para todo el fluido. Para el caso de la ecuación de Bernoulli, ec.(23.15), la constante es tomada a lo largo de una línea de corriente y varía para distintas líneas de corriente.

§26. Fluidos incompresibles

Se dice que un fluido es *incompresible* si la densidad no depende de las posiciones, ni del tiempo. Dicho de otra forma, la densidad es una cantidad constante. Esto significa que la ecuación de Euler, ec.(21.13), pueda escribirse como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla \phi. \quad (26.1)$$

Sustituyendo la ec.(23.5) en la ec.(26.1) se obtiene que:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla \phi. \quad (26.2)$$

Esta ecuación es similar a la ec.(23.11) que utilizamos para mostrar el teorema de Bernoulli haciendo el cambio $\omega \rightarrow p/\rho$. De esta manera, podemos decir que si el flujo es estacionario entonces la cantidad

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} + \phi = \text{const} , \quad (26.3)$$

a lo largo de una línea de corriente. Esta es la forma de la ecuación de Bernoulli para un fluido incompresible. Es la mas utilizada en aplicaciones sencillas de la hidrodinámica.

El hecho de que no aparezca el término de energía interna en la ec.(26.3) se debe a lo siguiente. Para el caso de un fluido adiabático e incompresible, para el cual $\rho = \text{const}$, la primera ley de la termodinámica, eq.(23.6) significa que $de = 0$, es decir, $e = \text{const}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de Bernoulli, ec.(23.15) se llega entonces a la ec.(26.3), pues los valores constantes no alteran a la de energía.

El ejemplo mas sencillo que existe con la ecuación de Bernoulli es el de calcular la velocidad de salida del agua de un tanque lleno de agua como lo muestra la fig.(II.8). La presión del agua en los puntos 1 y 2 es igual a la presión atmosférica p_0 . Si suponemos que el radio del cilindro del tanque es suficientemente grande como para que el nivel del mismo no baje mientras el agua sale por debajo

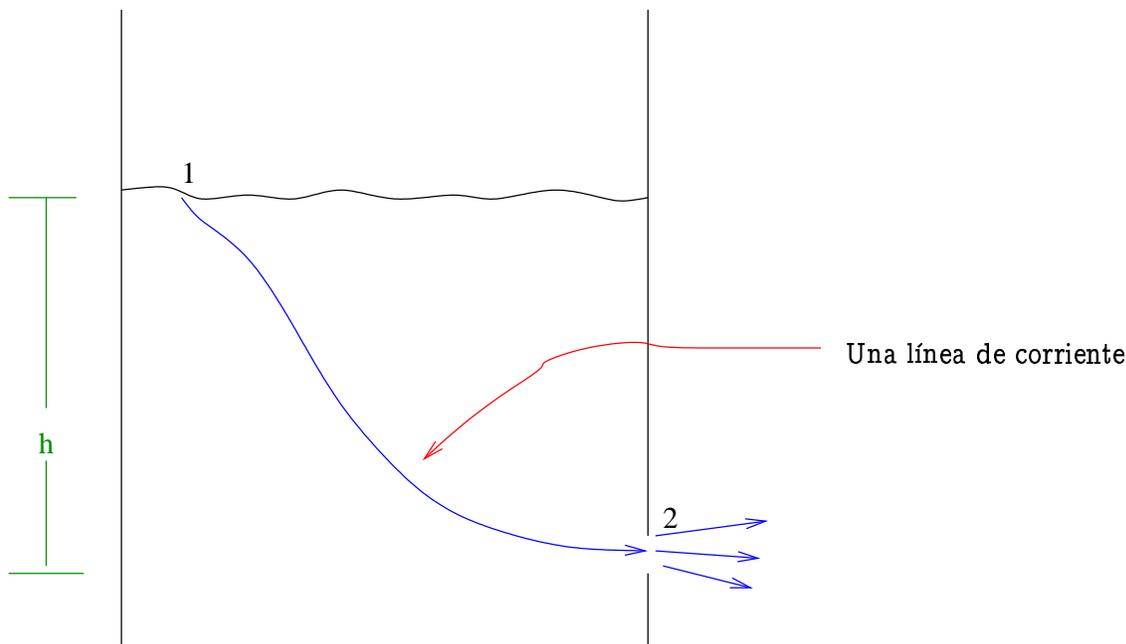


Figura II.8: La figura muestra una línea de corriente para el caso de un tanque lleno de agua hasta una altura h . El teorema de Bernoulli puede ser utilizado (ver texto) para saber la velocidad de salida del agua.

entonces la altura h del agua tiene un valor constante. La densidad del tanque es constante y así la ecuación de Bernoulli está dada por:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p_0}{\rho} - gh = \text{const} , \tag{26.4}$$

donde g es el valor de la aceleración gravitacional en la superficie de la tierra y v es la velocidad de salida del fluido (en la posición 2 de la figura) pues la velocidad en la superficie del tanque es nula. De esta manera la velocidad de salida del agua en el agujero del recipiente está dada por $v = \sqrt{2gh}$. Este sencillo resultado tiene nombre y se le conoce como la *ley de Torricelli*.

El movimiento curvo de una pelota de baseball también puede ser explicado mediante la ecuación de Bernoulli. La fig.(II.9) muestra una pelota de baseball que rota en sentido de las manecillas del reloj y se desplaza hacia abajo del papel. El aire alrededor de la pelota gira también en sentido de las manecillas del reloj. Debido al movimiento hacia abajo de la pelota es claro que la velocidad del aire en el lado izquierdo de la pelota es menor a la del lado derecho. De esta manera la presión es mayor del lado izquierdo comparada con la del lado derecho. De acuerdo a la ecuación de Euler, esto implica que se produce una fuerza que apunta en sentido contrario al de los gradientes de presión. Dicho de otro modo, una fuerza que apunta hacia la derecha de la pelota hace que esta tenga una trayectoria curvilínea. Por esta razón es posible mandar una “pelota curva” en el baseball.

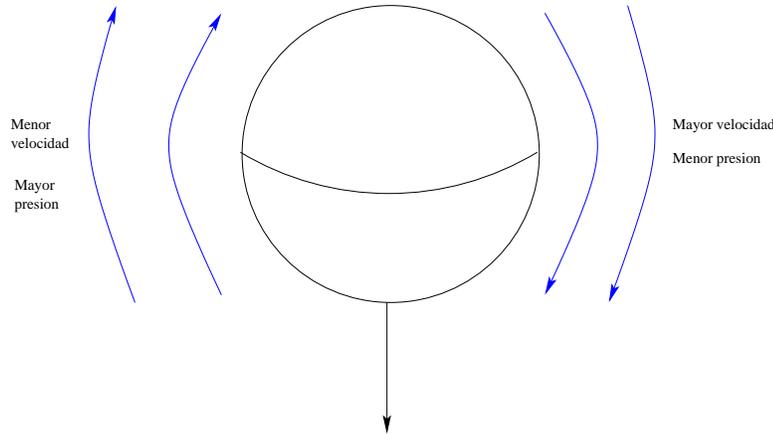


Figura II.9: La figura muestra una pelota de baseball en movimiento rotacional hacia abajo. La velocidad del aire en el lado derecho es mayor a la velocidad del aire en el lado izquierdo debido a la rotación de la pelota. Esto sucede debido a que la pelota está girando en sentido de las manecillas del reloj y a que la fricción entre la pelota y el aire hace que el aire gire en el mismo sentido de la rotación de la pelota. La diferencia de presiones hace que exista una fuerza neta que actúa sobre la pelota y así se curve en su movimiento.

Tarea 9

- (I) Toma dos pedazos de hoja de papel. Con un pedazo en cada mano, acercalos uno al otro y sopla entre ellos. ¿Qué sucede? ¿Se separan o se atraen los pedazos? ¿Por qué?
- (II) Al viajar en el metro (sobre todo en la línea 3 Indios Verdes – Universidad) habrás notado que cuando dos trenes viajan suficientemente rápido en sentidos opuestos y se acercan uno al otro se escucha un “boom” en las ventanas. La pregunta es: ¿Hacia donde apunta la fuerza sobre las ventanas y por qué?

§27. Ondas sonoras

Consideremos un fluido que se encuentra en reposo, de tal manera que su velocidad inicial sea $v_0 = 0$. La ecuación de continuidad implica entonces que la densidad inicial ρ_0 no depende explícitamente del tiempo. La ecuación de Euler en ausencia de campo gravitacional implica entonces que la presión inicial p_0 depende únicamente del tiempo. Combinando esto con la ecuación de estado $p = p(\rho)$ se sigue entonces que p_0 y ρ_0 tienen valores uniformes a lo largo de todo el fluido. Esto ya lo sabíamos pues es justamente el Principio de Pascal: “la presión es uniforme para un fluido en equilibrio hidrostático en ausencia de campos gravitacionales y fuerzas externas”.

Hagamos entonces un pequeño movimiento o *perturbación* de estas cantidades fijas. Esta perturbación la haremos de tal forma que las cantidades extras que añadiremos a la velocidad, presión y densidad

serán cantidades del primer orden. Para ser exactos, tomemos los nuevos valores de las cantidades hidrodinámicas como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \\ p &= p_0 + p', \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \end{aligned} \quad (27.1)$$

donde las cantidades con primas son cantidades pequeñas del primer orden. Para entender más el significado de estas pequeñas cantidades, estas son como cuando uno realiza una expansión de Taylor. Por ejemplo, consideremos que la presión p es una función de la temperatura T y de la entropía específica s . Entonces, una expansión de Taylor a primer orden daría:

$$p(T, s) \approx p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_s dT + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_T ds.$$

La cantidad $p(T, s) - p_0 = p'$ es precisamente lo que nosotros hemos denominado como una perturbación a primer orden. Evidentemente uno podría irse a más y más ordenes en la perturbación pero eso implica más y más términos y por lo tanto más y más complicaciones. . .

Consideremos además que nuestra perturbación es adiabática, es decir, haremos variar a nuestros valores fijos de presión, densidad y velocidad de manera adiabática hasta que alcancen sus valores nuevos. Si consideramos a la presión $p(\rho, s)$ como una función de la densidad ρ y la entropía s entonces:

$$p' = p - p_0 \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds. \quad (27.2)$$

y también, como la presión $p(\rho, s)$ es entonces función de la densidad y la entropía entonces:

$$\rho' = \rho - \rho_0 \approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p ds. \quad (27.3)$$

Comparando la ec.(27.2) con la ec.(27.3) se obtiene que:

$$p' = c^2 \rho', \quad \text{donde} \quad c^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (27.4)$$

Sustituyamos ahora los valores de las nuevas cantidades hidrodinámicas de la ec.(27.1) en la ecuación de continuidad y la de Euler (sin gravedad) y despreciemos términos de orden superior al primer orden. La ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (\rho' \mathbf{v}). \quad (27.5)$$

El segundo término del lado derecho de la ec.(27.5) se cancela puesto que como ρ' y \mathbf{v} son cantidades

de primer orden, entonces el producto ρv es una cantidad del segundo orden.

De la misma manera, la ecuación de Euler puede escribirse como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla (p_0 + p') \cong -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' = -\frac{c^2}{\rho_0} \nabla \rho'. \quad (27.6)$$

En el último paso de la ec.(27.6) utilizamos la relación entre ρ' y p' dadas por la ec.(27.4). Tomando la derivada con respecto al tiempo de la ec.(27.5) y el divergente de la ec.(27.6) y resolviendo para ρ' se obtiene que:

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \rho' = 0. \quad (27.7)$$

Esta es una ecuación de onda con velocidad c . El operador entre corchetes que aparece en la ec.(27.7) se le denomina en ocasiones *operador D'Alambertiano* en honor a su creador. A partir de la ec.(27.6) es claro que la presión también cumple con una ecuación de onda. Lo mismo ocurre con la velocidad v .

La ec.(27.7) en una dimensión (la dimensión x) puede escribirse como:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \rho' = 0. \quad (27.8)$$

Para encontrar la solución a la ec.(27.8) utilicemos las nuevas coordenadas ξ y η dadas por:

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct. \quad (27.9)$$

Entonces como x y t son funciones de ξ y η , utilizando la regla de la cadena se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (27.10)$$

De esta manera, las segundas derivadas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = c^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 = c^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\}. \end{aligned} \quad (27.11)$$

Sustituyendo la ec.(27.11) en la ecuación de onda para una dimensión, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (27.12)$$

Integrando esta ecuación una vez se obtiene que $\partial \rho' / \partial \eta = F(\eta)$ para alguna función $F(\eta)$. Integrando

nuevamente se obtiene que

$$\rho' = f_1(\eta) + f_2(\xi) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct), \quad (27.13)$$

donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias que dependen de la posición y del tiempo mediante la combinación $x \pm ct$. Esta es la solución mas general de la ecuación de onda. Para entender su significado físico, consideremos el sencillo caso en el cual $\rho' = f_2(x - ct)$ solamente. Entonces al tiempo $t = 0$, se obtiene que $x - ct = x_0$. Para que ρ' vuelva a tener el valor $\rho'(x_0)$ hay que esperar un determinado tiempo t y moverse hasta la posición x de tal forma que $\rho'(x_0) = \rho'(x - ct)$. En otras palabras, el valor de la presión al tiempo inicial vuelve a repetirse tiempo mas tarde (al tiempo t) en otra posición ($x = x_0 + ct$) hacia la derecha. Esto es lo que se conoce como una *onda de sonido*, y es la propiedad que todas las ondas tienen.

No vamos a detenernos mucho aquí pues en la parte de ondas ya se vieron las propiedades esenciales de una onda. Por ejemplo, si ϕ y Ψ son funciones de la posición y del tiempo que satisfacen la ecuación de onda, entonces el *principio de superposición* es válido: la suma $\Psi + \phi$ también satisface la ecuación de onda. También, una de las soluciones mas importantes a la ecuación de onda está dada por lo que se conoce como *ondas monocromáticas* (de una misma frecuencia o longitud de onda):

$$\phi = \text{Re} \left\{ \phi_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad (27.14)$$

donde ϕ_0 satisface la ecuación (sustituye la ec.(27.14) en la ecuación de onda y verificalo):

$$\nabla^2 \phi_0 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \phi_0 = 0. \quad (27.15)$$

La cantidad ω es denominada la frecuencia de la onda. El caso mas sencillo de una onda monocromática es el de una onda plana propagada en la dirección del eje x . Para dicha onda, todas las cantidades son funciones que dependen únicamente de $x - ct$. De esta manera,

$$\phi = \text{Re} \{ A \exp [-i\omega (t - x/c)] \}. \quad (27.16)$$

Si escribimos $A = a e^{i\alpha}$ entonces la ec.(27.16) toma la forma que ya antes conocías:

$$\phi = a \cos (\omega x/c - \omega t + \alpha). \quad (27.17)$$

La cantidad $k \equiv \omega/c$ se denomina *número de onda*. También se denomina *longitud de onda* λ a la cantidad $2\pi/k$. La cantidad a es la *amplitud de la onda*. El argumento del coseno es la *fase* de la onda.

En términos generales, cuando la onda viaja en cualquier dirección \mathbf{r} se dice que una onda monocromática está dada por:

$$\phi = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (27.18)$$

donde solamente se toma la parte real de la ec.(27.18), pero por comodidad, no lo escribimos ya más. El vector \mathbf{k} es el *vector de onda* y apunta en la dirección de propagación de la onda. Su magnitud k es el número de onda. Una onda de varios “colores” se compone de la superposición de varias ondas monocromáticas.

Sustituyendo la ec.(27.18) en la ecuación de onda, se obtiene que $k^2 c^2 = \omega^2$, o bien

$$kc = \omega, \quad (27.19)$$

que es la *relación de dispersión* para una onda plana.

Tarea 10

Efecto Doppler (fig.(II.10)). Considera un fluido que se mueve de manera homogénea con velocidad \mathbf{u} con respecto a un sistema de coordenadas K fijo. Sobre el fluido, tomemos un sistema de coordenadas K' , es decir, el sistema de coordenadas K' se mueve con respecto a K a una velocidad constante \mathbf{u} .

- (I) Si los orígenes de los sistemas K y K' coinciden al tiempo $t = 0$ muestra que el vector posición \mathbf{r} medido en el sistema K y el vector posición \mathbf{r}' medido en el sistema K' están relacionados uno al otro mediante la relación $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t$.
- (II) Sobre el sistema K' , donde el fluido está en reposo, una onda monocromática está dada por la ec.(27.18) para el vector \mathbf{r}' . Muestra que la frecuencia (relación de dispersión) de esta onda en el sistema K está dada por:

$$\omega = ck + \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}. \quad (27.20)$$

- (III) Considera ahora una fuente la cual emite una onda monocromática y que se mueve con velocidad \mathbf{u} con respecto a un medio en reposo. Toma el sistema K' sobre la fuente en movimiento. Así, con respecto al sistema K' el fluido se mueve con velocidad $-\mathbf{u}$. En este sistema, la frecuencia de la onda está dada por ω_0 y corresponde a las oscilaciones producidas por la fuente. Muestra que la frecuencia ω en el sistema K está relacionada con la frecuencia ω_0 del sistema K' mediante la siguiente relación:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - (\mathbf{u}/c) \cos \theta}, \quad (27.21)$$

donde θ es el ángulo formado por el vector de onda \mathbf{k} y la velocidad \mathbf{u} .

- (IV) Muestra que si la fuente se aleja del observador, entonces el ángulo θ es tal que $\pi/2 < \theta \leq \pi$ y por lo tanto la frecuencia recibida es menor que la frecuencia emitida, es decir, los tonos son más graves (corrimiento al rojo).

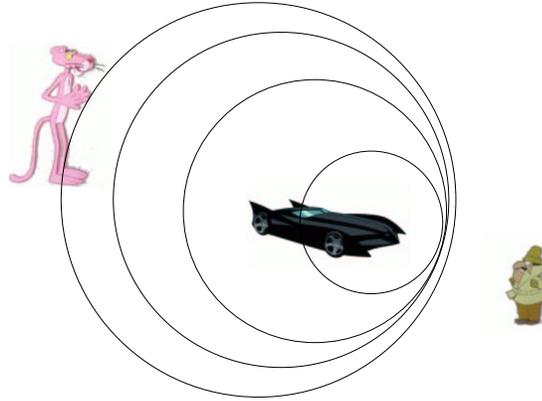


Figura II.10: El efecto Doppler consiste (ver texto) en que la frecuencia de las ondas de una fuente en movimiento (como el batimobil) difieren para distintos observadores en movimiento y en reposo común. El inspector escucha tonos mas agudos (azules), de mayor frecuencia. La pantera rosa escucha tonos mas graves (colores), de menor frecuencia. Esto se debe a que la frecuencia con la que las crestas llegan al inspector aumenta debido al movimiento del batimobil. Lo opuesto ocurre para la pantera rosa.

- (v) Muestra que si la fuente se acerca al observador, entonces el ángulo θ es tal que $0 \leq \theta < \pi/2$ y por lo tanto la frecuencia recibida es menor que la frecuencia emitida, es decir, los tonos son mas agudos (corrimiento al azul).
- (vi) Muestra que cuando $u \cos \theta > c$ entonces la frecuencia ω se vuelve negativa. Esto significa que el sonido escuchado llega en "reversa". El sonido producido por la fuente a un determinado instante llega antes que el sonido emitido en instantes previos.

§28. Flujos supersónicos

Ahora que ya sabemos lo que son las ondas sonoras producidas gracias a perturbaciones en el fluido, analicemos las diferencias entre flujos subsónicos (a velocidades menores que las del sonido) y flujos supersónicos. A pesar de que hasta ahora hemos considerado que la velocidad del sonido es una constante a lo largo de todo el fluido, en términos generales no lo es. Esta velocidad varía de punto a punto del fluido y evoluciona como función del tiempo. De esta manera, uno suele referirse en ocasiones a la *velocidad local del sonido* para ser mas precisos.

Consideremos que en el punto 0 del espacio se hace una perturbación. Como ya sabemos está perturbación se desplaza en forma uniforme (esférica) a lo largo de todo el fluido con velocidad c , la velocidad del sonido. Si ahora realizamos la misma perturbación, pero sobre un fluido que se mueve de manera uniforme con velocidad v , entonces la situación es como la que se muestra en el la fig.(II.11). La perturbación se mueve con el fluido a una velocidad $v + c\hat{n}$, donde \hat{n} es un vector en la dirección de propagación del sonido con respecto al fluido.

Si la velocidad del fluido es menor a la velocidad local del sonido (flujo subsónico) entonces la

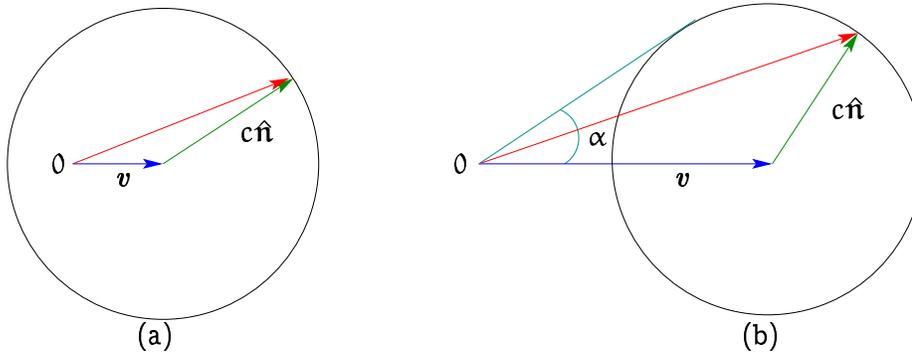


Figura II.11: La figura muestra la región de comunicación dada una perturbación en el punto 0 en un fluido que se mueve uniformemente con velocidad v . En el caso (a), cuando la velocidad del fluido es menor a la velocidad del sonido c la perturbación es transmitida a todo el fluido. En el caso (b) la perturbación es comunicada únicamente aguas abajo en un cono de apertura 2α . El vector \hat{n} es unitario y apunta en la dirección de propagación de la perturbación en el sistema de referencia del fluido.

perturbación se propaga a lo largo de todo el fluido, como lo muestra el caso (a) de la fig.(II.11). El caso supersónico difiere grandemente de los anteriores. Aquí la perturbación no es capaz de transmitirse a todo el fluido. Únicamente se transmite “*aguas abajo*” en dirección de la corriente como lo muestra el caso (b) de la fig.(II.11). Como el flujo es uniforme, la perturbación se propaga únicamente aguas abajo dentro de un cono de apertura 2α . La superficie frontera de este cono se denomina *superficie de Mach* o *característica* y al ángulo α , el ángulo que hace la superficie de Mach con el vector velocidad en el punto 0, se le denomina el ángulo de Mach.

En el caso de flujo no uniforme lo único que puede afirmarse es que las superficies características intersectan al vector velocidad haciendo un ángulo igual al ángulo de Mach en un punto dado del fluido.

De la fig.(II.11) se sigue que

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} \equiv \frac{1}{M}, \quad (28.1)$$

donde el número M se denomina frecuentemente como el *número de Mach* y es una de las cantidades mas importantes en el estudio de la dinámica de gases[†]. Cuando $M \rightarrow 1$ el flujo se convierte en *transónico* (ie flujo que viaja a la velocidad del sonido). A medida que $M < 1$ el flujo es subsónico y $M > 1$ cuando el flujo es supersónico. El número de Mach tiende a infinito cuando la velocidad del fluido alcanza su valor máximo que corresponde a un valor de infinito.

Cabe hacer notar que todo lo dicho anteriormente con respecto a la propagación de perturbaciones en un fluido no se aplica a perturbaciones con respecto a la vorticidad y a la entropía. Utilizando la conservación de la entropía para un fluido ideal, resulta que las perturbaciones de entropía y vorticidad no se mueven con respecto al gas, estas se mueven con el gas mismo. Esto es una consecuencia de la

[†] Generalmente los fluidos que viajan a grandes velocidades, por ejemplo los supersónicos, son gases. Es por esto que el estudio de la mecánica de fluidos a altas velocidades se denomina dinámica de gases

ley de conservación de la entropía (la entropía permanece constante a medida que el fluido se mueve) y la ley de conservación de la circulación (la vorticidad permanece constante a medida que el fluido se mueve). En otras palabras, las “características” producidas al perturbar la entropía y/o la vorticidad del fluido coinciden con las líneas de corriente.

Consideremos ahora el movimiento de un flujo adiabático y estacionario sobre el cual la aceleración gravitatoria es nula ($g = 0$). Escogiendo un sistema de referencia adecuado es posible decir que la velocidad del fluido es cero en al menos un punto del fluido. Así, la ecuación de Bernoulli puede escribirse como:

$$v^2/2 + \omega = \omega_0, \quad (28.2)$$

donde ω_0 representa a la entalpía evaluada en el punto donde la velocidad se anula. Esta última relación implica que la velocidad toma el valor máximo cuando la entalpía alcanza un mínimo. En el caso de flujo adiabático, la primera ley de la termodinámica, ec.(23.7) implica que $d\omega = dp/\rho$. Como la densidad de masa es una cantidad positiva, entonces las diferenciales $d\omega$ y dp tienen el mismo signo, es decir, varían de la misma manera. De aquí que la presión se incrementa cuando la velocidad disminuye y viceversa.

El valor mínimo de la entalpía sucede cuando la temperatura alcanza el valor de cero absoluto. Esto corresponde a una presión igual a cero y a un valor de $\omega = 0$. De esta manera, es posible calcular el valor máximo de la velocidad v_{\max} utilizando la ec.(28.2):

$$v_{\max} = \sqrt{2\omega_0}, \quad (28.3)$$

que corresponde al valor de la velocidad de un gas al fluir de manera estacionaria y adiabática sobre un vacío.

Calculemos la variación de la densidad de flujo de masa $j = \rho v$ a lo largo de una línea de corriente en un flujo adiabático y estacionario. Utilizando la ecuación de Euler se obtiene que $v_k \partial v_l / \partial x_k = -(1/\rho) \partial p / \partial x_l$. Multiplicando por el vector tangente a la línea de corriente dx_l esta relación se obtiene que sobre una línea de corriente $v dv = -dp/\rho$. Debido a que para flujo adiabático $dp = c^2 d\rho$ según la definición de velocidad del sonido, entonces se sigue que:

$$\frac{d\rho}{d\rho} = -\rho v / c^2. \quad (28.4)$$

Debido a que $d(\rho v) = \rho dv + v d\rho$ la ec.(28.4) se puede escribir como:

$$\frac{d(\rho v)}{d\rho} = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (28.5)$$

De la ec.(28.5) se sigue que a medida que la velocidad se incremente a lo largo de una línea de corriente el flujo de masa se incrementa siempre y cuando el flujo permanezca subsónico. Cuando el

fluido es supersónico, el flujo de masa disminuye. Esto significa que con el incremento de la velocidad, las líneas de corriente tienden a “juntarse” (converger) en la dirección de movimiento, siempre y cuando el flujo permanezca subsónico. En el caso supersónico las líneas de corriente tienden a “separarse” (diverger). De la ec.(28.5) se sigue que el flujo de masa ρv alcanza su valor máximo j_* cuando la velocidad del gas es igual a la velocidad local del sonido:

$$j_* = \rho_* c_*, \quad (28.6)$$

donde las cantidades con asterisco se refieren a las cantidades evaluadas en el punto donde el flujo de masa alcanza su valor máximo.

Tarea 11

- (1) *Muy probablemente habrás notado que al manejar en carretera diversos insectos (mosquitos) terminan aplastados en el parabrisas del automóvil. ¿Por qué razón se aplasta el mosquito? ¿Es su impacto contra el parabrisas lo que ocasiona su muerte? Da una estimación de la presión del aire justo antes de pasar cerca del parabrisas para el caso en que la densidad del aire es una constante y la velocidad del sonido en el aire es de $c \approx 300$ m/s.*

Así como existe el gas ideal, en diversas aplicaciones de la física se habla de una clase de gases con un comportamiento particular en el modo en que cambian sus cantidades termodinámicas bajo procesos cuasi-estáticos. Estos gases se denominan politrópicos. Se dice que un cambio politrópico en las variables termodinámicas de un gas ocurre si dicho cambio se realiza de manera cuasi-estática y es tal que su calor específico permanece constante durante todo el proceso. A partir de esto puede mostrarse que la presión y la densidad de dicho gas están relacionadas mediante:

$$p \propto \rho^\kappa, \quad (28.7)$$

donde κ es el índice politrópico y es una constante. Como ya sabemos, en el caso de un gas ideal su valor es igual a $\kappa = 5/3$ para un gas monoatómico. De hecho en este caso $\kappa = c_V/c_P$, el cociente entre los calores específicos a volumen y presión constante. En el caso de un gas isotérmico la ecuación de estado de un gas ideal implica que $p \propto \rho$, es decir el índice politrópico tiene un valor igual a la unidad.

Una onda de choque es una discontinuidad (en el sentido matemático) de las cantidades hidrodinámicas a través de una superficie. Existen ciertas condiciones que debe cumplir una onda de choque. Por ejemplo, si consideramos que la superficie de discontinuidad es plana (siempre puede hacerse esto, tomando un pedazo suficientemente pequeño de esta superficie) y paralela al plano Oyz y que la velocidad del flujo es hacia la dirección x positiva, entonces desde el sistema de referencia de la superficie de discontinuidad (ie tomemos la velocidad de la superficie de discontinuidad igual a cero) los flujos de

masa, energía y momento deben conservarse a través de esta superficie[†]:

$$[\rho v] = 0, \quad (28.8)$$

$$\left[\frac{1}{2} v^2 + \omega \right] = 0, \quad (28.9)$$

$$[p + \rho v^2] = 0. \quad (28.10)$$

Donde $[a] \equiv a_2 - a_1$ para cualquier cantidad y los subíndices 1 y 2 se refieren a los valores de las cantidades hidrodinámicas antes de cruzar la superficie de discontinuidad (la onda de choque) y después de cruzar la onda de choque respectivamente. Formalmente una onda de choque cumple con la condición de que:

$$p_2 > p_1, \text{ y } V_1 < V_2, \quad (28.11)$$

donde $V \equiv 1/\rho$ es el volumen por unidad de masa.

(II) Muestra que la diferencia de velocidades está dada por:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}, \quad (28.12)$$

y que

$$\omega_1 - \omega_2 + \frac{1}{2} (V_1 + V_2) (p_2 - p_1) = 0, \quad (28.13)$$

Esta última relación determina la relación entre p_2 y V_2 dados p_1 y V_1 . Se denomina la adiabática de Hugoniot o simplemente la adiabática de choque.

(III) Muestra que para un gas politrópico, la entalpía y la velocidad del sonido están dados respectivamente por:

$$\omega = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p V, \quad c^2 = \gamma p V. \quad (28.14)$$

(IV) Muestra que en el caso de un gas politrópico, la adiabática de Hugoniot puede escribirse como:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\kappa + 1)p_2 + (\kappa - 1)p_1}{(\kappa - 1)p_2 + (\kappa + 1)p_1}, \quad (28.15)$$

y que la diferencia de velocidades de la ec.(28.12) está dada por:

$$v_1 - v_2 = \frac{(p_2 - p_1) \sqrt{2V_1}}{\sqrt{(\kappa - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}}. \quad (28.16)$$

[†] Esto es fácil de mostrar si se considera una pequeña superficie que atraviesa la superficie de discontinuidad. Sobre el volumen de esta superficie se integran las ecuaciones de conservación de masa, conservación de energía y conservación de momento para encontrar que los flujos de estas cantidades no deben variar a través de las superficies de discontinuidad

(v) Con todo lo anterior muestra que:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\kappa + 1)M_1^2}{(\kappa - 1)M_1^2 + 2}, \quad (28.17)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa M_1^2}{(\kappa + 1)} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \quad (28.18)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\{2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)\} \{(\kappa - 1)M_1^2 + 2\}}{(\kappa + 1)^2 M_1^2}, \quad (28.19)$$

donde M_1 es el número de Mach evaluado en el lado 1.

(vi) Finalmente muestra que para un choque fuerte, es decir cuando $M_1 \gg 1$ entonces V_2/V_1 tiende a una cantidad finita y que $T_2/T_1 \propto p_2/p_1$, es decir la temperatura se incrementa tanto como uno quiera al cruzar el choque. Calcula los valores a los que estas cantidades tienden en el límite.

§29. Cosmología Newtoniana

La aplicación mas sencilla que existe utilizando hidrodinámica no-relativista en Astrofísica es hacia el universo mismo. Todo consiste en imaginar al universo como constituido por partículas de fluido que representan las galaxias: "el fluido universal". Distintas observaciones muestran que el universo a larga escala es homogéneo (se ve igual en cualquier larga escala) e isotrópico (no varía según la dirección que se tome). Esto únicamente sucede a grandes escalas pues existe un grado alto de anisotropía e inhomogeneidad en escalas cortas.

Consideremos un origen de coordenadas O amarrado a nuestra galaxia. Otra galaxia con origen de coordenadas O' se mueve con velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ con respecto a nuestra galaxia y \mathbf{r} es el radiovector medido con respecto a O . La galaxia en O' se localiza en $\mathbf{r} = \mathbf{a}$. De esta manera, la galaxia con origen O' se mueve con el fluido universal con respecto a O . Si un observador en O' observa una galaxia en la posición \mathbf{r}' y mide la velocidad de esta misma como $\mathbf{v}'(\mathbf{r}') = \mathbf{v}'(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, entonces de acuerdo a la ley de adiciones de velocidades de Galileo

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}') = \mathbf{v}'(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{a}). \quad (29.1)$$

Debido a la homogeneidad e isotropía del universo, la densidad de masa ρ y la presión p son tales que:

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{r}') &= \rho'(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \rho(\mathbf{r}), \\ p'(\mathbf{r}') &= p'(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = p(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (29.2)$$

Sin embargo, el *principio cosmológico* dice que *no vivimos en un lugar privilegiado*. En otras

palabras, las ecs.(29.1)-(29.2) son validas para cualquier origen O que se tome en el universo. De esta manera, la ec.(29.1) significa que la velocidad debe ser necesariamente una función lineal del radiovector, es decir, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \xi(t)\mathbf{r} + \text{const.}$ Debido a que $\mathbf{v}(\mathbf{r} = 0) = 0$, la constante en esta ecuación debe ser cero. Al hecho de que la velocidad sea proporcional a la distancia se le denomina *ley de Hubble*. Por comodidad, introduzcamos un sistema de coordenadas amarrado a las galaxias. Estas *coordenadas de comovimiento* están definidas por

$$\mathbf{r} = R(t)\mathbf{r}_0, \quad (29.3)$$

donde $R(t)$ es el *factor de expansión* que está normalizado a una determinada época de tal forma que $R(t_0) = 1$ con $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$. Así, la ley de Hubble, ec.(29.1), es tal que:

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{r} = f(t)\mathbf{r} \quad ([\dot{\quad}] \equiv (d[\quad]/dt)). \quad (29.4)$$

Dado a que no hay creación espontánea de materia en el universo, entonces la ecuación de continuidad ec.(20.5) es válida. Esta ecuación con ayuda de la ley de Hubble y el hecho de que la densidad $\rho(t)$ solo es función del tiempo t se sigue que $\dot{\rho}/\rho = -3\dot{R}/R$ y por lo tanto

$$\rho R^{-3} = \rho(t_0). \quad (29.5)$$

Sustituyendo la ley de Hubble ec.(29.4) en la ecuación de Euler ec.(21.13) se obtiene

$$3(\dot{f} + f^2) = -\text{grad}^2\phi = -4\pi G\rho, \quad (29.6)$$

donde G es la constante de gravitación universal y la igualdad del lado derecho de la ecuación se obtiene gracias a la ecuación de Poisson para el campo gravitacional. De aquí se sigue que el “campo gravitacional del universo” está dado por:

$$\mathbf{g} = -\frac{4}{3}\pi G\rho\mathbf{r}. \quad (29.7)$$

Sustituyendo el valor de f en la ec.(29.6) y utilizando la ec.(29.5) se obtiene la “*ecuación de movimiento del universo*”:

$$\ddot{R}R^2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho(t_0) = -C \quad (29.8)$$

donde C es una constante positiva. Debido a que $d/dt = \dot{R}d/dR$, la ec.(29.8) puede reescribirse como:

$$\dot{R}d\dot{R} = -CR^{-2}dR. \quad (29.9)$$

Integrando esta relación se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{C}{R} = -\frac{1}{2}\kappa. \quad (29.10)$$

El primer término del lado izquierdo en esta ecuación es la energía cinética del universo en expansión. El segundo término es la energía producida por las fuerzas de presión y el término de la derecha es entonces la energía total del sistema. Utilizando un modelo cosmológico relativista puede mostrarse que la constante κ representa la *curvatura del universo*. Para analizar la dinámica del universo en expansión estudiemos los siguientes casos:

- † *Curvatura negativa.* → Hagamos el cambio $\kappa \rightarrow -\kappa$. De esta manera la energía total del universo es positiva y en el límite cuando $R \rightarrow \infty$, es decir cuando $t \rightarrow \infty$, se obtiene de la ec.(29.10) que $R = \sqrt{kt}$, es decir, el universo está *abierto* y se expande por siempre.
- † *Cero curvatura.* → La solución de la ec.(29.10) con $\kappa = 0$ es $R = (9C/2)^{1/3}t^{2/3}$ cuando $t \rightarrow \infty$
- † *Curvatura positiva.* → Para este caso la energía total del universo es negativa y $R \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_*$ para un cierto tiempo finito t_* (ver tarea 12). En otras palabras, el universo se recolapsa después de un determinado tiempo t_* .

Tarea 12

- (I) *Integra la ecuación de movimiento del universo, ec.(29.10), por completo para los casos en los que (a) la curvatura es negativa, (b) la curvatura es cero y (c) la curvatura es positiva. Muestra que en el último caso el universo se recolapsa después de un tiempo finito pasada la "gran explosión". ¿Cuál es el valor de este tiempo?*
- (II) *Dibuja un diagrama de R vs t en donde esquemáticamente muestres que sucede para cada uno de los casos del inciso anterior.*

§30. Análisis dimensional

En el curso de mecánica se estudió en detalle las unidades que se consideran fundamentales en la física. A lo largo de tu vida habrás notado que existen diversas unidades utilizadas para describir el universo que nos rodea. Por ejemplo, en el caso de longitud hablamos de metros, centímetros, kilómetros, yardas, millas, pies, años luz, parsecs, etc.

El objetivo de una medición es *comparar*. Lo que uno hace es comparar un objeto con otro para así describir alguna propiedad física del mismo. De nada sirve decir: "Juanito está alto" (esto solo tiene sentido pues en nuestras mentes está mas o menos claro que una altura promedio de un humano es de alrededor de 1.70 m). La frase debe decirse algo así como "Juanito está mucho mas alto que Pedrito". Igualmente, es difícil entender que las distancias nucleares son pequeñas o que las distancias

astronómicas son enormes si no se compara con algo. Es por esto que se eligió una barra llamada metro la cual se encuentra en un museo de París. Haciendo copias del mismo uno puede comparar cualquier distancia con esta barra fundamental.

El concepto de medir es bien conocido por todos nosotros. Esto es una de las cualidades humanas mas impresionantes. No obstante, el uso de las unidades varía de lugar en lugar. Una persona curiosa que calza zapatos del número 29 en México se habrá dado cuenta que ese número se refiere precisamente a 29 cm. En el caso de zapatos para hombre, este mismo número corresponde aproximadamente al número 9 en el Reino Unido, al número 43 en el continente Europeo, al número 9.5 en los Estados Unidos de América y al número 27.5 en Japón. El significado de estos números no es claro. De hecho no conozco a nadie que lo sepa. Solamente se habla de número de calzado y ya. Este mismo ejemplo sucede para cualquier tipo de unidades que existe. Es un verdadero caos. Esta ha sido la razón por la cual se ha procurado que exista un Sistema Internacional (SI) de Unidades. Aunque el éxito del SI es notorio, aún se siguen utilizando unidades distintas a las del SI y sus derivados en diversos lugares del mundo.

Lo importante es notar que existe algo mas profundo que el concepto de unidad. De hecho, se denomina una *dimensión* a una cantidad física de la naturaleza. Las dimensiones mas comunes son el tiempo t , la longitud l y la masa m . Cabe hacer notar que cuando hablamos de dimensión no nos referimos a unidades. Por ejemplo, la dimensión de longitud NO significa centímetros, ni metros, ni millas, etc, pero la dimensión de longitud se mide en centímetros, metros, millas, etc.

Dicho de otra forma, decimos que una cantidad *dimensional* es aquella para la cual su valor depende de una escala aceptada. Análogamente, se dice que una cantidad *adimensional* es una cantidad para la cual su valor no depende de una escala aceptada. En términos generales, se dice que la longitud l , el tiempo t , la masa m , la temperatura T , la carga q y otras mas son cantidades dimensionales, pero el cociente de dos longitudes, dos tiempos, dos masas, dos temperaturas, dos cargas, etc es claramente una cantidad adimensional.

La cantidad adimensional mas famosa que existe es el ángulo. Sobre un circulo de radio r , se dice que un pedazo de circunferencia l está dado por la relación $l = \alpha r$. Esta relación define al ángulo $\alpha = l/r$, una cantidad adimensional.

La longitud misma puede escogerse de manera adimensional. En efecto, si tomamos a la longitud L como longitud "base", entonces cualquier otra longitud, digamos K puede medirse con respecto a la primera. De esta forma podemos decir que la segunda longitud está dada por la cantidad K/L . De esta manera pueden anularse las dimensiones de longitud. La experiencia muestra que esto no es conveniente de ninguna manera.

La razón por la cual los ángulos se definen de manera adimensional y las longitudes no viene de la geometría. Consideremos dos triángulos semejantes. Los lados de uno de los triángulos son mas grandes que el del otro triángulo. Uno de sus ángulos es α . En este caso, los ángulos son los mismos incluso cuando las longitudes de los lados son distintas. Razón mas que suficiente para decir que las longitudes deben ser dimensionales y los ángulos adimensionales.

Así pues, la experiencia nos provee con diversas dimensiones que nosotros consideramos esenciales. Siempre buscamos dimensiones sencillas de analizar. Por ejemplo, si decimos que nuestras dimensiones son l , m , t (que son las dimensiones que aparecen siempre en un problema de mecánica) entonces las dimensiones de velocidad son iguales a dimensiones de distancia entre tiempo. La manera matemática para escribir esto es mediante el uso de corchetes cuadrados:

$$[v] = lt^{-1}. \quad (30.1)$$

Utilizando esta notación, se dice que una cantidad p es adimensional cuando $[p] = 1$. En lugar de estas dimensiones “fundamentales” podríamos haber escogido a la longitud, la masa y la velocidad como fundamentales. De esta manera, las dimensiones de tiempo serían iguales a las dimensiones de longitud entre las dimensiones de velocidad.

El escoger las dimensiones “fundamentales” apropiadas viene de la experiencia misma. Estamos ya tan acostumbrados a que la longitud, el tiempo y la masa son dimensiones fundamentales que no pensamos nunca más en que pueden no serlo. Lo que sucede es que de alguna manera, los humanos seleccionamos las que consideramos más sencillas, pero está claro que no tienen nada de fundamentales.

En el estudio de la ley de Newton en mecánica se vio que justamente esta ley define el concepto de *masa inercial* m de un objeto. La ley de Newton está dada por $F = ma$, donde F es la fuerza que actúa sobre un objeto de masa m y a es la aceleración producida por esta fuerza. Lo que Newton encontró es que $F \propto a$. Lo brillante de su trabajo fue el descubrir que la constante de proporcionalidad era una propiedad innata al cuerpo: su masa. Lo mismo sucede para el caso de otras leyes de la naturaleza. Newton pudo haber puesto la ley como $F = cma$, donde c es una constante de proporcionalidad. Si las dimensiones de la fuerza F son tales que $[F] = f$, entonces $[c] = ft^{-2}m^{-1}l^{-1}$. Hemos entonces definido una nueva dimensión, la dimensión de fuerza f . Así, podríamos subir en el número de dimensiones fundamentales tanto como sea posible. La experiencia y comodidad nos indican que esto no es útil. De hecho, en la ley de Newton se supone que $c \equiv 1$.

Veamos ahora que también es posible utilizar menos dimensiones de las “fundamentales”. Por ejemplo, la ley de Newton de gravitación universal es $F = Gm_1m_2/r^2$, donde G es la constante universal de gravitación. Si tomamos $[G] = 1$ (es decir G es adimensional) y por comodidad suponemos que $G = 1$, esto implica redefinir a las masas. En efecto, como $[G] = [\text{masa}]^{-1}[\text{longitud}]^3[\text{tiempo}]^{-2}$ se obtiene que necesariamente $[\text{masa}] = m = l^3t^{-2}$. De esta manera, la masa ya no es una dimensión independiente o fundamental. Esta es proporcional al cubo de la dimensión de longitud y es inversamente proporcional al cuadrado de la dimensión del tiempo. Si ahora a la velocidad de la luz la hacemos adimensional y tomamos su valor idénticamente igual a uno, se obtiene que $[\text{longitud}] = [\text{tiempo}]$. Así, la masa y el tiempo son dimensiones que ahora dependen de la longitud solamente. En otras palabras, podemos deshacernos de todas las dimensiones y suponer que todas las demás cantidades son adimensionales (dependen solamente de la longitud). Así es posible describir un problema físico a la manera “matemática”, sin dimensiones.

De esta manera podemos subir o bajar el número de dimensiones tanto como queramos. El número de dimensiones convencionales es completamente arbitrario. Lo que sucede es que las dimensiones de tiempo, masa y longitud son suficientes para describir los fenómenos físicos de la mecánica, pero ciertamente no es una condición necesaria.

En ciertas aplicaciones de la física resulta importante tener un único sistema de unidades. Uno de los más comunes es el que utilizan los cosmólogos. En este sistema de unidades se escoge a las constantes fundamentales como la *constante de Planck*[†] \hbar , la velocidad de la luz en el vacío c y la constante de Boltzmann para los gases k_B de la siguiente manera:

$$\hbar = c = k_B = 1, \quad [\hbar] = [c] = [k_B] = 1. \quad (30.2)$$

Las dimensiones de estas cantidades están dadas por:

$$\begin{aligned} [\hbar] &= [\text{energía}][\text{tiempo}], \\ [c] &= [\text{longitud}][\text{tiempo}]^{-1}, \\ [k_B] &= [\text{energía}][\text{temperatura}]^{-1}. \end{aligned} \quad (30.3)$$

Sustituyendo la ec.(30.3) en la ec.(30.2) se obtiene que

$$[\text{energía}][\text{tiempo}] = [\text{longitud}][\text{tiempo}]^{-1} = [\text{energía}][\text{temperatura}]^{-1} = 1. \quad (30.4)$$

Como la masa y la energía están relacionadas mediante la famosa relación $E = mc^2$ entonces con ayuda de la ec.(30.4) se obtiene que $[\text{energía}] = [\text{masa}][\text{longitud}]^2[\text{tiempo}]^{-2} = [\text{masa}]$. Con esto y la ec.(30.4) se obtiene que:

$$[\text{Energía}] = [\text{Masa}] = [\text{Temperatura}] = [\text{Longitud}]^{-1} = [\text{Tiempo}]^{-1}. \quad (30.5)$$

Cuando se escoge este sistema de unidades, con una sola dimensión, la dimensión de energía, suele medirse todo en Giga-electron-volts, que son unidades de energía (GeV). La tabla II.1 muestra las equivalencias para estas unidades.

Supongamos ahora que una cantidad a tiene dimensiones dadas por

$$[a] = l^{k_1} m^{k_2} t^{k_3}, \quad (30.6)$$

donde los k_i 's son números enteros no negativos. En el caso de realizar un reescalamiento de unidades, las unidades primadas, tales que

[†]La constante de Planck es la constante de proporcionalidad que aparece en la relación entre la energía E de un fotón y su frecuencia angular ω : $E = \hbar\omega$.

Unidad	Valor (GeV)	Valor Convencional
Energía	1	1.6×10^{-3} erg
Temperatura	1	1.16×10^{13} K
Masa	1	1.78×10^{-24} gm
Longitud	1	1.97×10^{-14} cm
Tiempo	1	6.58×10^{-25} s

Tabla II.1: La tabla muestra la equivalencia de una unidad de energía para distintas unidades en el sistema único de unidades utilizado en cosmología. Por ejemplo, cuando se habla de que la temperatura es de 1 GeV significa que la temperatura es de 1.16×10^{13} K en el sistema internacional.

$$l' = \alpha l, \quad m' = \beta m, \quad t' = \gamma t, \quad (30.7)$$

es claro que la relación entre la cantidad a' en el nuevo sistema de unidades y la cantidad a en el sistema no primado está dada por:

$$a' = \alpha^{k_1} \beta^{k_2} \gamma^{k_3} a. \quad (30.8)$$

Existen argumentos muy generales para demostrar la relación de la ec.(30.8), pero todos hemos hecho un cambio de unidades. Por ejemplo, supongamos que $a = 3 \text{ kg}^2 \text{ m/s}$. Pero $1 \text{ lb} = 0.454 \text{ kg}$, $1 \text{ yd} = 0.914 \text{ m}$ y $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$. Por lo tanto, la cantidad a medida en yardas, libras y minutos, está dada por $a = 3 \times (0.454)^{-2} \text{ lb}^2 \times (0.914)^{-1} \text{ yd} \times (60) \text{ min}^{-1} = [(0.454)^{-2} (0.914)^{-1} (60)] a'$, donde $a' \equiv 3 \text{ lb}^2 \text{ yd min}^{-1}$. Así se obtiene que $a' = (0.454)^2 (0.914) (60)^{-1} a$, en completa analogía con la ec.(30.8).

A pesar de que una cantidad física varíe de acuerdo al sistema de unidades utilizado, la relación funcional entre sus dimensiones se mantiene invariante. En otras palabras, las leyes físicas no dependen en la elección de unidades. Estas leyes son relaciones funcionales muy generales entre distintas cantidades. Por ejemplo, la ley de Hooke para los resortes tiene la misma forma sin importar el sistema de referencia que se utilice para su medición.

A manera de ejemplificar el poder del análisis dimensional consideremos un gas caracterizado por la temperatura T , la densidad ρ y una constante física, digamos el calor específico a volumen constante c_V . Este calor específico es la cantidad de calor que gana para subir la temperatura en una unidad, es decir: $c_V = (\partial \epsilon / \partial T)_V = T(\partial s / \partial T)_V$ de acuerdo a la primera ley de la termodinámica. Si tomamos a la longitud, el tiempo y la masa como dimensiones independientes, entonces:

$$[T] = \Theta, \quad [\rho] = M l^{-3}, \quad [c_V] = [\text{energía}] m^{-1} \Theta^{-1} = l^2 \Theta^{-1} t^{-2}. \quad (30.9)$$

La ecuación de estado del gas es tal que:

$$p = p(T, \rho, c_V). \quad (30.10)$$

Nuestro problema está caracterizado por tres dimensiones independientes (masa, tiempo y longitud) y cuatro parámetros fundamentales (temperatura, calor específico, densidad y presión). En lugar del tiempo, la masa y la longitud podemos escoger otras tres dimensiones representativas, por ejemplo la temperatura la densidad y el calor específico. Si denotamos a las dimensiones de estas cantidades por:

$$[T] = \Theta, \quad [\rho] = R, \quad \text{y} \quad [c_V] = \zeta, \quad (30.11)$$

entonces las dimensiones de presión están dadas por:

$$[p] = [\text{Fuerza}]/[\text{Área}] = \text{mt}^{-2}\text{l}^{-1} = \Theta^{k_1} R^{k_2} \zeta^{k_3} = \Theta R \zeta. \quad (30.12)$$

Hagamos ahora un cambio de unidades de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T \rightarrow T' = \alpha_1 T \equiv 1 &\Rightarrow \alpha_1 = 1/T, \\ \rho \rightarrow \rho' = \alpha_2 \rho \equiv 1 &\Rightarrow \alpha_2 = 1/\rho, \\ c_V \rightarrow c'_V = \alpha_3 c_V \equiv 1 &\Rightarrow \alpha_3 = 1/c_V. \end{aligned} \quad (30.13)$$

De esta manera y siguiendo la propiedad mencionada en la ec.(30.8) se obtiene que:

$$p' = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 p = p/T\rho c_V. \quad (30.14)$$

Pero debido a que la ecuación de estado del gas, ec.(30.10), es una ley física, su forma no varía al hacer un reescalamiento de unidades. De esta manera, en las nuevas unidades primadas, se obtiene que $p' = p'(T', \rho', c'_V) = p'(1, 1, 1)$, es decir, $p' = \text{const.}$ Entonces la ec.(30.14) implica que:

$$p \propto T\rho c_V, \quad (30.15)$$

que se conoce como la ecuación de Clapeyron (ecuación del gas ideal). La constante de proporcionalidad se encuentra por medio del experimento o por medio de una teoría física del comportamiento cinético de las moléculas del gas. Lo que se encuentra es que esta constante de proporcionalidad está dada por R/μ , donde R es la constante universal de los gases y μ es el peso molecular medio.

Regresemos a la condición de equilibrio hidrostático que analizamos en la sección §22 para el caso de un enorme gas con simetría esférica (por ejemplo, una estrella, una nube interestelar, el gas de una galaxia). De la ec.(22.19) sabemos que si los gradientes de presión exceden a las fuerzas de gravitación, entonces la configuración tiende a expandirse. Inversamente, si las fuerzas de gravitación del gas son mas fuertes que los gradientes de presión entonces el gas tiende a “colapsarse”. Este es uno de los problemas centrales de la astrofísica. Precisamente estos colapsos gravitacionales son capaces de formar la estructura del universo que nos rodea: galaxias, estrellas y agujeros negros.

Calculemos cual es el radio L que un gas de densidad uniforme debe poseer para que las fuerzas de

presión y de gravitación se mantengan en equilibrio mecánico. El problema en cuestión está caracterizado por una longitud característica L , la presión del gas p , su densidad ρ y una constante fundamental, la constante de gravitación universal G . En otras palabras, el radio L de la masa gaseosa es tal que $L = L(G, \rho, p)$. El problema está caracterizado por tres dimensiones independientes (l , m y t) y cuatro cantidades importantes (L , G , ρ y p).

Tomemos ahora a las dimensiones de L , p , y ρ como independientes y denotémoslas por:

$$[L] \equiv \mathbb{L} \quad [\rho] \equiv \mathbb{R} \quad [p] \equiv \mathbb{P}. \quad (30.16)$$

De esta manera:

$$[G] = \mathbb{P}\mathbb{L}^{-2}\mathbb{R}^{-2}. \quad (30.17)$$

Si ahora hacemos un reescalamiento de unidades (las unidades primadas) de tal forma que:

$$\begin{aligned} L \rightarrow L' = \alpha_1 L \equiv 1 &\Rightarrow \alpha_1 = 1/L, \\ \rho \rightarrow \rho' = \alpha_2 \rho \equiv 1 &\Rightarrow \alpha_2 = 1/\rho, \\ p \rightarrow p' = \alpha_3 p \equiv 1 &\Rightarrow \alpha_3 = 1/p. \end{aligned} \quad (30.18)$$

Utilizando el hecho de que $L' = L'(G', \rho', p')$ en el nuevo sistema de unidades combinado con los resultados de la ec.(30.18) se obtiene que:

$$L' = L' \left(G' = \frac{G}{L^{-2} p \rho^{-2}}, 1, 1 \right) = \text{const.} \quad (30.19)$$

La cantidad G' es adimensional y por lo tanto, la ec.(30.19) es tal que $G \propto p/L^2 \rho^2$. Debido a que la velocidad del sonido está dada por la ec.(28.14) entonces $p \sim c^2 \rho$ y por lo tanto:

$$L \sim \frac{c}{\sqrt{G\rho}}. \quad (30.20)$$

La longitud L representa el tamaño característico que una configuración gaseosa debe poseer para que sus fuerzas de presión y gravitacionales estén en equilibrio mecánico. Se denomina la *longitud de Jeans* en honor a su descubridor y de ahora en adelante la escribiremos como R_J . La masa que un objeto de radio R_J posee es, a orden de magnitud, $M_J \sim R_J^3 \rho$ y se denomina la *masa de Jeans*. Es claro que un objeto que posee su masa mayor a su correspondiente masa de Jeans, debe colapsarse. De esta manera, cuando $M_{\text{objeto}} > M_J$ (ie $R_{\text{objeto}} > R_J$) se obtiene un *colapso gravitacional*. Esto es lo que se conoce como el *criterio de estabilidad gravitacional de Jeans*.

Los ejemplos mencionados aquí con respecto al análisis dimensional son consecuencia del teorema fundamental del análisis dimensional: el *Teorema Π de Buckingham*. No enfatizaremos mas en este

teorema, pero cabe hacer notar la importancia de que en algún momento de tu vida leas su demostración mas general.

§31. Fluidos viscosos

Hasta ahora hemos considerado fluidos ideales, es decir, fluidos que no presentan disipación de energía por medio de fricción interna (viscosidad), transmisión de calor y radiación, es decir, fluidos ideales. A manera de ejemplificar estos procesos de disipación analicemos brevemente a los fluidos viscosos.

Primeramente analicemos la diferencia entre un líquido y un sólido. La diferencia mas notable es que los solidos actúan todos en “una sola pieza”. Por ejemplo, si a un sólido se le aplica una fuerza en uno de sus extremos, entonces el sólido se mueve en conjunto. Todas sus moléculas comienzan a moverse en la dirección de la aplicación de la fuerza. Cada fragmento del sólido está pegado a su vecino inmediato. Estas fuerzas moleculares que mantienen pegados a los fluidos se denominan fuerzas de *cohesión*, proveniente de la palabra latina que significa pegarse a.

El comportamiento de los fluidos es muy distinto al de los sólidos. Si intentamos meter nuestra mano en agua e intentamos levantar un pedazo de la misma, no lo intentaremos. El agua se resbalara por entre nuestras manos y a lo mas quedaremos con la sensación de estar mojados. Sin embargo, esto no significa que la fuerza de cohesión en los líquidos no existe. Por el contrario, lo que sucede es que su valor es relativamente pequeño. La manera mas sencilla de observar que existe una fuerza de cohesión en los líquidos es analizando su superficie.

Consideremos un líquido contenido en un recipiente. Justamente abajo de su superficie, las fuerzas de cohesión actúan en todas las direcciones para mantener al líquido pegado. Sin embargo, en la superficie la fuerza de cohesión actúa solamente hacia abajo, donde se encuentra el líquido en cuestión[†]. Para mantener al líquido en la superficie es necesario ejercer una fuerza igual a la de cohesión en sentido opuesto. Este trabajo hecho por la superficie representa una energía que comúnmente se denomina *energía superficial*. Debido a que se encuentra esparcida sobre un área esta energía suele medirse en unidades de energía por unidad de área. En el sistema cgs estas unidades son $\text{erg}/\text{cm}^2 = \text{dyn}/\text{cm}$.

Del mismo modo en que la energía potencial de un objeto en un campo gravitacional tiende a alcanzar su valor mínimo, la energía superficial tiende también a alcanzar su valor mínimo cuando se le deja actuar libremente. Una pequeña gota de agua en el aire tiende por lo mismo a tener una forma esférica, pues la esfera es la figura geométrica que para un volumen dado posee la menor área. Así, la energía superficial puede reducirse a un mínimo. En ocasiones esto no sucede en la atmósfera terrestre debido a la fuerza gravitacional de la tierra. Así, las gotas poseen una forma de lágrima.

Las superficies de los líquidos tienden a ser segmentos de una esfera. En el caso de una alberca, la superficie es plana y por lo tanto el radio de curvatura de la esfera es infinito. Sin embargo, para el caso

[†]Las fuerzas de cohesión entre el aire de la atmósfera y un líquido como el agua son despreciables.

del océano Pacífico la superficie del mismo es un segmento de una esfera con radio igual al radio de la tierra.

En ocasiones existe una entrada de energía a la superficie de un líquido, lo que implica que su superficie se extienda. Por ejemplo, cuando el viento que sopla en los mares es suficientemente fuerte, este viento inyecta energía a la superficie del mar estirándolo y formando un incremento en su superficie (¿alguna vez has navegado cuando el viento sopla excesivamente fuerte sin vomitar?).

Debido a que la superficie de un líquido se estira y acorta como una liga, la energía superficial suele denominarse con mas frecuencia como *tensión superficial*, en completa analogía con la definición utilizada para materiales elásticos.

Las fuerzas de cohesión que mantienen pegadas a las diversas partes de un líquido son exactamente las mismas que ayudan a que un líquido se mantenga pegado a la superficie del recipiente que lo contiene. Sin embargo, cuando las fuerzas de cohesión son entre cuerpos distintos se denominan fuerzas de *adhesión* que proviene de la palabra latina que significa pegarse a.

Las fuerzas de adhesión ocasionan efectos geométricos de como se ve la superficie de un líquido dentro de un contenedor. Por ejemplo, las fuerzas de adhesión entre el agua y el vidrio son mas grandes que las fuerzas de cohesión entre el agua misma. Dicho de otro modo, en los lugares en los que el agua tiene contacto con el vidrio, las fuerzas adhesivas son suficientemente fuertes para vencer a las fuerzas cohesivas del agua. Por esta razón el nivel del agua en un contenedor se levanta en las paredes para equilibrar a las fuerzas de adhesión. Esto hace que la fuerza de gravedad del líquido que se levanta mas las fuerzas de cohesión del agua balancean la fuerza de adhesión del cristal-agua. Este efecto se nota mejor en un recipiente pequeño y hace que la superficie del agua tenga una forma semiesférica que se dobla hacia dentro del recipiente. Visto de manera transversal, la superficie toma una forma de luna en cuarto menguante y por lo tanto se le denomina *menisco*, proveniente de la palabra griega que significa luna pequeña. Si por el contrario las fuerzas cohesivas son mayores que las fuerzas adhesivas, como en el caso de mercurio y vidrio o agua y vidrio encerado, entonces el líquido reduce su contacto con el sólido para balancear las fuerzas. Este es un efecto inverso al del agua-vidrio. La superficie toma una forma esférica hacia fuera del líquido.

Por lo mencionado anteriormente, si se tira agua sobre la superficie de un vidrio esta se extenderá de la mejor manera sobre la superficie del vidrio para obtener el mayor contacto posible. De esta manera se obtendrá el balance necesario entre las fuerzas de cohesión y adhesión. Se dice entonces que el agua *moja* al vidrio. Si por el contrario, es mercurio el que se arroja sobre el vidrio, este líquido tenderá a formar esferas para minimizar su contacto con el vidrio tanto como sea posible. De esta manera puede lograrse un equilibrio entre las fuerzas de cohesión y adhesión. Vulgarmente se dice que el mercurio *no moja* al vidrio.

Calculemos cual es la altura h que debe levantarse el nivel de un líquido debido a la fuerza de adhesión entre este y su contenedor de forma cilíndrico, por ejemplo, agua contenida en una probeta de laboratorio. La adhesión σ es una tensión superficial que actúa alrededor del anillo circular de agua

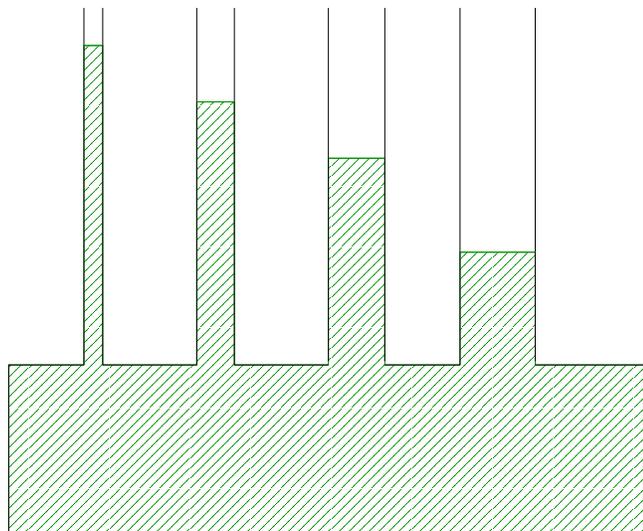


Figura II.12: El fenómeno de capilaridad consiste en que el nivel de fluido en un tubo aumenta a medida que su radio disminuye.

que está recargado sobre el tubo. La longitud de este círculo está dada por $2\pi r$, donde r es el radio del tubo. Así, la fuerza que actúa sobre este anillo de fluido debida a la adhesión está dada por $2\pi r\sigma$. La fuerza de gravitación que actúa sobre el mismo anillo está dada por mg , donde m es la masa del anillo de fluido y g es la aceleración gravitacional en la superficie de la tierra. Debido a que las fuerzas de cohesión del fluido son mucho menores que las de adhesión, entonces la fuerza de gravitación debe balancear a la fuerza de adhesión y por lo tanto:

$$2\pi r\sigma = mg,$$

pero como $m = \rho \times \text{volumen}$ y el volumen del cilindro desplazado está dado por $\pi r^2 \times h$ se obtiene entonces que

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g}. \quad (31.1)$$

Así, el aumento del nivel de agua en un tubo h es inversamente proporcional al radio del cilindro que lo contiene. Los contenedores cilíndricos de radio microscópico son los que mas alto tienen el nivel del fluido que contienen. Estos tubos se denominan *capilares*, de la palabra latina que significa como cabello. El efecto de levantar a un fluido por medio de este fenómeno se denomina *acción capilar*. La fig.(II.12) muestra pictóricamente el funcionamiento de la acción capilar.

La fricción es una fuerza que se ejerce en dirección contraria al movimiento que se produce cuando un sólido se desplaza sobre otro. Esta fricción tiende a disminuir el movimiento y eventualmente lo detiene.

Cuando un sólido se mueve a través de un fluido se producen fuerzas de fricción. Por ejemplo, el movimiento de un barco en el agua produce fricción que lo lleva ultimadamente a detenerse. La única manera de impedir que el barco se detenga es mediante la inyección de energía en las hélices del mismo (o en sus turbinas o velas).

La fricción en un fluido se produce debido al gasto de energía que se tiene que producir para separar el fluido de sus propias fuerzas de cohesión. En el caso del barco en el agua este separamiento debe hacerse para dar paso al barco por su trayectoria a través del agua. Si el fluido se separa con una fuerza excesiva se producen remolinitos no regulares en la parte posterior al mismo. A estos movimientos irregulares en las líneas de corriente del fluido se le denomina *turbulencia*. Cuando la turbulencia aparece en el caso del barco y el agua, la energía necesaria para mover al barco se incrementa enormemente y el movimiento del barco cesa en un tiempo menor.

La fricción parece no existir cuando se considera el movimiento en consideración es el fluido mismo. Cuando un fluido se mueve, no lo hace como un sólido en una sola pieza. Por el contrario, lo hace de manera que un elemento de fluido se mueve relativamente con respecto a su alrededor y por lo tanto se genera una forma de fricción interna en el fluido.

Se dice que un fluido es viscoso si es difícil ponerlo en movimiento. Ejemplos de líquidos viscosos son la miel, la glicerina y el vidrio. Como mencionamos anteriormente el vidrio es un fluido bastante particular y para cualquier fin práctico macroscópico es mejor tratarlo como un sólido.

Imaginemos que un cilindro metálico gira en el fondo de un tanque con líquido viscoso. Las partículas del fluido cercanas al cilindro son arrastradas por el movimiento del cilindro y debido a la viscosidad del mismo, poco a poco las partículas de fluido más alejadas del cilindro comienzan a girar alrededor del mismo. En otras palabras, existe una transmisión de momento en una dirección ortogonal (radial) al movimiento (azimutal) de las partículas de fluido. Esto es distinto al caso de mecánica en donde la transmisión de momento debido a la fricción ocurre en la misma dirección del movimiento.

La cantidad física que describe la transmisión de momento es el tensor de densidad de flujo de momento dado por la ec.(23.24). En el caso de un fluido que se mueve uniformemente en la dirección \hat{e}_y se tiene que $v = v\hat{e}_y$. De esta manera y utilizando la ec.(23.24) se obtiene que el flujo de momento Π transmitido en la dirección \hat{e}_x está dado por:

$$\Pi = \rho v^2 - p. \quad (31.2)$$

Diversos experimentos muestran que las fuerzas viscosas son tales que:

$$\Pi = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (31.3)$$

donde la constante η es conocida como el coeficiente de viscosidad del medio. Las dimensiones de η son tales que $[\eta] = \text{ml}^{-1}\text{t}^{-1}$. En el sistema de unidades cgs, la viscosidad cinemática se mide en $\text{g cm}^{-1}\text{s}^{-1} \equiv \text{Poisse}$. Es importante hacer notar que en la ec.(31.3) se está suponiendo que existe un

Fluido	Viscosidad (g/(s cm) = Poise)
Hidrógeno	0.88×10^{-4}
Aire	1.8×10^{-4}
Benceno	0.65
Agua	0.01
Mercurio	0.015
Glicerina	15

Tabla II.2: La tabla muestra los valores de viscosidad para ciertos fluidos.

flujo que se mueve paralelamente al eje $0y$ y que la viscosidad ocasiona una transmisión de flujo de momento en la dirección del eje $0x$. La tabla II.2 da algunos valores de viscosidad para ciertos fluidos.

Consideremos dos superficies planas y sólidas suficientemente grandes sumergidas en un fluido de viscosidad η . Ambas superficies se encuentran paralelas y están separadas por una distancia x_0 . Una de las superficies comienza a moverse con velocidad uniforme v_0 en dirección \hat{e}_y , la dirección ortogonal a su separación. La transmisión del momento en la dirección \hat{e}_x está dada por la ec.(31.3) y es tal que $\Pi = \text{const}$. De esta manera $dv/dx = \text{const}$ y por lo tanto $v \propto x$, es decir

$$v = \frac{v_0}{x_0}x. \quad (31.4)$$

En otras palabras, la velocidad varía linealmente con la posición que separa a las placas.

Analicemos ahora el caso en el que un flujo viscoso se mueve a lo largo de un tubo cilíndrico de radio R y longitud L . El fluido corre a través del cilindro gracias a una diferencia de presiones Δp (ecuación de Euler). Las coordenadas más sencillas a utilizar en este caso son coordenadas cilíndricas, ec.(4.2). Para este caso particular, donde la velocidad v se mueve en dirección al eje del cilindro y varía como función de la distancia r medida desde el mismo, es claro que la ec.(31.3) puede escribirse como:

$$\Pi = -\eta \frac{dv}{dr}. \quad (31.5)$$

Dentro de nuestro cilindro original, tomemos un pequeño cilindro de radio r y misma altura que el cilindro original L . La cantidad Π es la cantidad de momento que fluye por unidad de área por unidad de tiempo. El área por la cual fluye el momento en una unidad de tiempo es $2\Pi rL$. De esta manera el momento por unidad de tiempo (la fuerza) que fluye a través del cilindro de radio r está dada por:

$$\begin{aligned} 2\pi rL\Pi &= -2\pi rL\eta \frac{dv}{dr} \\ &= \text{Fuerza producida por las diferencias de presiones en los extremos del cilindro} \\ &= \pi r^2 \Delta p. \end{aligned} \quad (31.6)$$

De aquí que:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r}{2L\eta}\Delta p, \quad (31.7)$$

es decir:

$$v = -\frac{r^2}{4L\eta}\Delta p + \text{const},$$

pero como la velocidad del fluido debe ser cero en las paredes del cilindro (ie en $r = R$), entonces

$$v = \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2). \quad (31.8)$$

Calculemos como varía la masa por unidad de tiempo M al fluir por este cilindro. Para esto utilicemos el hecho de que el elemento de volumen por unidad de tiempo dV está dado por[†]:

$$dV = v \cdot d\mathbf{a} = v da, \quad (31.9)$$

donde el elemento de área da está en la dirección de v , es decir, corresponde a las caras circulares del cilindro. El elemento de área da de un círculo está dado por (fig.(II.13)) $da = r dr d\varphi$. De esta manera:

$$\begin{aligned} dV &= v(r) da, \\ &= v(r) r dr d\varphi, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} V(r) &= \int v(r) dr \int_0^{2\pi} d\varphi, \\ &= 2\pi \int v(r) dr, \\ &= \frac{\pi\Delta p}{4L\eta} \int (R^2 - r^2) d(r^2), \\ &= \frac{\pi\Delta p}{4L\eta} \left(R^2 r^2 - \frac{r^4}{2} \right). \end{aligned} \quad (31.10)$$

Así, el volumen total por unidad de tiempo $V(r = R)$ está dado por:

$$V = \frac{\pi\Delta p R^4}{8L\eta}, \quad (31.11)$$

y la masa total por unidad de tiempo está dada por $M = \rho V$, es decir:

[†] Como vimos en la sección §20 En un tiempo dt , un elemento de fluido al moverse se desplaza una distancia igual a $v dt$. El volumen de fluido contenido en un pequeño cilindro de longitud $v dt$ y sección transversal da está dado por $dt v \cdot da$.

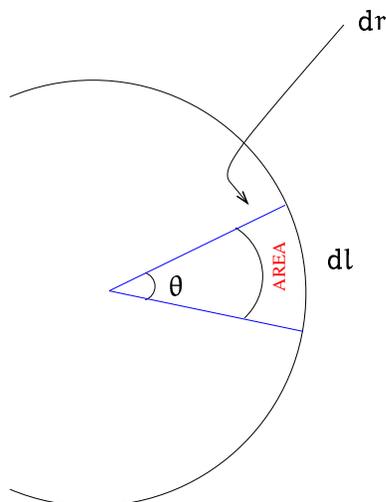


Figura II.13: La figura muestra como calcular el elemento de área natural sobre un círculo (coordenadas circulares). El área señalada en la figura (que es aproximadamente igual a un rectángulo) es igual al producto de los lados. Un lado es igual a $dl = r d\phi$ y el otro lado es igual a dr . Así el elemento de área $da = r d\phi dr$.

$$M = \frac{\pi \Delta p \rho R^4}{8 L \eta}. \tag{31.12}$$

Este resultado se conoce como la *ley de Poiseuille* y muestra que la masa total por unidad de tiempo de un fluido viscoso que fluye a través de un cilindro es proporcional a la cuarta potencia del radio del mismo. La relación que aparece en la ec.(31.12) fue determinada experimentalmente por Haegen en 1839 y mas tarde por Poiseuille en 1840. Fue argumentada de manera teórica por Stokes en 1845. El flujo de un fluido viscoso entre un par de paredes fijas se denomina frecuentemente como *flujo de Poiseuille*. La cantidad $\eta/\rho \equiv \nu$ que aparece frecuentemente en el estudio de fluidos viscosos se denomina *viscosidad cinemática* a diferencia de la *viscosidad dinámica* η .

En el caso mas general para fluidos viscosos, la ecuación de Euler se generaliza como:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p - \nabla \phi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \tag{31.13}$$

Esta relación se conoce como la *ecuación de Navier-Stokes*. La cantidad ζ es la *segunda viscosidad*. Su estudio no nos corresponde en este curso, pero la dejamos aquí para que en un futuro continúes con un estudio mas avanzado de la mecánica de fluidos. . .

Apéndice.

GNU Free Documentation License

Version 1.1, March 2000

Copyright © 2000 Free Software Foundation, Inc.

59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other written document “free” in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

§32. Applicability and Definitions

This License applies to any manual or other work that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. The “Document”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “you”.

A “Modified Version” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “Secondary Section” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall

subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (For example, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “Invariant Sections” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License.

The “Cover Texts” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License.

A “Transparent” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, whose contents can be viewed and edited directly and straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup has been designed to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. A copy that is not “Transparent” is called “Opaque”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, \LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML designed for human modification. Opaque formats include PostScript, PDF, proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML produced by some word processors for output purposes only.

The “Title Page” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

§33. Verbatim Copying

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display

copies.

§34. Copying in Quantity

If you publish printed copies of the Document numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a publicly-accessible computer-network location containing a complete Transparent copy of the Document, free of added material, which the general network-using public has access to download anonymously at no charge using public-standard network protocols. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

§35. Modifications

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section

of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

- List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has less than five).
- State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- Preserve all the copyright notices of the Document.
- Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- Include an unaltered copy of this License.
- Preserve the section entitled “History”, and its title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section entitled “History” in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the “History” section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- In any section entitled “Acknowledgements” or “Dedications”, preserve the section's title, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- Delete any section entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.

- Do not retitle any existing section as “Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties – for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

§36. Combining Documents

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections entitled “History” in the various original documents, forming one section entitled “History”; likewise combine any sections entitled “Acknowledgements”, and any sections entitled “Dedications”. You must delete all sections entitled “Endorsements.”

§37. Collections of Documents

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

§38. Aggregation With Independent Works

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, does not as a whole count as a Modified Version of the Document, provided no compilation copyright is claimed for the compilation. Such a compilation is called an “aggregate”, and this License does not apply to the other self-contained works thus compiled with the Document, on account of their being thus compiled, if they are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one quarter of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that surround only the Document within the aggregate. Otherwise they must appear on covers around the whole aggregate.

§39. Translation

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License provided that you also include the original English version of this License. In case of a disagreement between the translation and the original English version of this License, the original English version will prevail.

§40. Termination

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received

copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

§41. Future Revisions of This License

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have no Invariant Sections, write "with no Invariant Sections" instead of saying which ones are invariant. If you have no Front-Cover Texts, write "no Front-Cover Texts" instead of "Front-Cover Texts being LIST"; likewise for Back-Cover Texts.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.